

HOJA 3: ANILLOS

- Sean A y B dos anillos conmutativos y $f : A \rightarrow B$ un isomorfismo de anillos. Demuestra que si $a \in A$ es divisor de cero en A entonces $f(a)$ es divisor de cero en B . Concluye que si A es dominio de integridad, entonces B también lo es.
- Considera los siguientes pares de anillos y da un argumento que demuestre que no son isomorfos:
 - \mathbb{Z}_{16} y $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$
 - \mathbb{Z}_{16} y $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$
 - \mathbb{Z} y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$
 - $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Demuestra que si $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo, entonces f es la aplicación identidad.
Pista: Halla $f(2)$ como $f(1 + 1)$, $f(3)$ como $f(1 + 1 + 1)$ y así sucesivamente. Determina después f de los números negativos.
- Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \bar{z}$ es un isomorfismo de anillos. Nota: si $z = a + bi$ se define el conjugado de z como $\bar{z} = a - bi$.
- Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, definida como $f(a) = [a]_n$, es un homomorfismo de anillos suprayectivo. Demuestra que no es inyectivo.
- Construye las tablas de multiplicar de \mathbb{Z}_6 y de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Úsalas para encontrar un isomorfismo entre los dos anillos.
- Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, definida como $f([a]_{10}) = ([a]_2, [a]_5)$, es un isomorfismo de anillos.

Observación: Además de las propiedades de isomorfismo, tienes que probar que la

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

8. Generaliza el resultado del ejercicio anterior, es decir, demuestra lo siguiente:

Si m y n son primos entre sí, entonces la aplicación $f : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, definida como $f([a]_{mn}) = ([a]_m, [a]_n)$, es un isomorfismo de anillos.

Observación: Además de las propiedades de isomorfismo, tienes que probar que la aplicación f está bien definida, es decir, que su definición no depende de la elección de representantes.

9. (**Difícil**) El resultado anterior no es cierto si m y n no son primos entre sí: demuestra que, en ese caso, \mathbb{Z}_{mn} y $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ no son isomorfos.

Pista: Considera $k = m.c.m.(m, n)$ y demuestra que, si f es isomorfismo entre los anillos indicados, entonces $f([k]_{mn}) = 0$, lo cual es una contradicción.

10. El hecho de que un conjunto sea un anillo con unidad depende de cómo estén definidas las operaciones. Demuestra que $2\mathbb{Z}$ con la suma habitual y un nuevo producto definido como $a * b = (ab)/2$ es un anillo conmutativo con unidad. Demuestra que es isomorfo a \mathbb{Z} con la suma y producto habituales.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow arrow pointing to the left, both partially obscured by the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70