Universidad Rey Juan Carlos

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
GRADOS CON MATEMÁTICAS
CURSO 2015-16

HOJA 6: ANILLOS (IDEALES)

---

1. Demuestra que en $\mathbb{Z}$ se cumple $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, donde $d = m.c.d.(a, b)$.

2. Demuestra que en un anillo conmutativo con unidad todo ideal maximal es primo.

   Pista: Usa las caracterizaciones de ideales primos y maximales mediante sus cocientes.

3. Demuestra que en $\mathbb{Z}$ se cumple que, dado un ideal $I \neq (0)$, I es primo si y solo si $I = p\mathbb{Z}$ con p primo.

4. *a*) Demuestra que $\mathbb{Z}_8$ y $\mathbb{Z}_9$ tienen un único ideal maximal.

   b) Demuestra que $\mathbb{Z}_{10}$ y $\mathbb{Z}_{12}$ tienen más de un ideal maximal.

   Pista: Utiliza el ejercicio 10 de la hoja 4 donde se determinan todos los ideales de $\mathbb{Z}_n$.

5. Demuestra que todo ideal primo de $\mathbb{Z}$ es maximal, con una excepción. ¿Cuál es esa excepción?.

   Pista: Usa las caracterizaciones de ideales primos y maximales mediante sus cocientes.

6. Demuestra que $I = 4\mathbb{Z}$ es un ideal maximal en $A = 2\mathbb{Z}$. Demuestra que A/I no es un cuerpo. Explica por qué esto no contradice el resultado al respecto visto en teoría.

7. Considera el anillo $A = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ donde la suma es la habitual pero el producto está definido como $a \cdot b := 0$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$. Considera el conjunto $B = 2\mathbb{Z}$. Demuestra que B es un ideal maximal de A que no es primo. Explica por qué esto no contradice el resultado del ejercicio 2.