Tema 6: Inferencia bayesiana

Nota: *Estos son los ejercicios propuestos para este tema. Se recomienda, además, hacer más ejercicios (a vuestra propia elección) de la bibliografía recomendada en la asignatura.*

Ejercicio 6.1 *Se realizan* 40 *pruebas de un experimento de Bernoulli del que se desconoce la probabilidad* p *de obtener un resultado favorable, y se obtienen* 10 *éxitos.*

a) Determinar la densidad a posteriori de la probabilidad p *utilizando una densidad a priori,* $g(p) = 3p^2$*, si* $0 < p < 1$.

b) Probar la hipótesis nula, $H_0 : p \leq 0'2$*, frente a la hipótesis alternativa,* $H_1 : p > 0'2$*, con un nivel de significación* $\alpha = 0'05$.

Ejercicio 6.2 *Ej. 11.9 [Spiegel et al., 2013] (ampl.)*

Una encuesta entre 100 *votantes elegidos de manera aleatoria de todo el padrón de un distrito dado indicó que el* 55 % *de ellos estaban a favor del candidato A. Se supone que antes de hacer la encuesta la proporción de votantes de ese distrito a favor de este candidato tenía una densidad uniforme sobre el intervalo* $[0, 1]$.

a) Determinar la densidad a posteriori de la proporción de votantes del candidato A.

b) Calcular el intervalo de credibilidad al 95 % *para la proporción de votantes del candidato A.*

Ejercicio 6.3 *Ej. 8.5 [Bolstad, 2007]*

En una estudio de la contaminación del agua en zonas recreativas por parte de las aves marinas y otros animales, se tomaron 116 *muestras de un litro de agua resultando que* 17 *de las mismas estaban contaminadas con niveles bacteriológicos por encima de lo recomendable. Calcular,*

a) La distribución del número de muestras contaminadas.

b) La proporción a posteriori del número de muestras contaminadas utilizando como distribución a priori una función beta$(1, 4)$

c) La esperanza y la varianza de la distribución a posteriori.

d) La aproximación normal de dicha distribución.

Ejercicio 6.4 *En una estudio de la contaminación ambiental del aire se recogieron* 176 *muestras de las que* 24 *resultaron contaminadas por encima de los niveles permitidos por la directiva comunitaria. Sea* p *la probabilidad real de que una muestra tomada al azar en la misma zona esté contaminada.*

a) Calcular la distribución a posteriori de la probabilidad de tomar una muestra contaminada usando un distribución a priori beta$(1, 10)$

b) Probar la hipótesis nula, $H_0 : p \geq 0'15$ *frente a la hipótesis alternativa,* $H_1 : p < 0'15$*, al* 5 % *de nivel de significación.*

Ejercicio 6.5 *Ej. 11.13 [Spiegel et al., 2013]*

El número de accidentes durante un periodo de seis meses en una intersección tiene una distribución de Poisson con media λ. *Se cree que* λ *tiene una densidad a priori,* $\Gamma(\lambda; 2, 1/5)$. *Si se observaron* 8 *accidentes durante los primeros seis meses del año, calcular: a) la densidad a posteriori, b) la media a posteriori, y c) la varianza a posteriori.*

Ejercicio 6.6 *Ej. 10.1 [Bolstad, 2007]*

El número de partículas emitidas por una fuente radiactiva durante un intervalo de 10 *segundos sigue una distribución de Poisson con media* λ. *En* 5 *experimentos de* 10 *segundos cada uno se observaron un número de partículas igual a:* $4, 1, 3, 1, 3$, *respectivamente. Calcular la distribución a posteriori del parámetro* λ *asumiendo una distribución uniforme a priori, así como la media y la varianza a posteriori.*

Ejercicio 6.7 *Ej. 11.58 [Spiegel et al., 2013]*

Las mediciones de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 *cojinetes de bolas fabricados por una máquina durante una semana indicaron una media de* $0'824\,cm$ *y una desviación estándar de* $0'042\,cm$. *Sabiendo que los diámetros se distribuyen normalmente, calcular el intervalo de credibilidad bayesiano al* 95 % *para el diámetro medio de los cojinetes fabricados por la máquina asumiendo una distribución a priori normal con media* $0'8\,cm$ *y desviación estándar* $0'05\,cm$.

Ejercicio 6.8 *Ej. 11.3 [Bolstad, 2007]*

El proceso estándar para fabricar un polímero tiene un rendimiento medio del 35 %. *Un ingeniero químico ha desarrollado un proceso modificado. Para investigar si el proceso modificado mejora el rendimiento, realiza el proceso en* 10 *lotes y mide el rendimiento (en porcentaje) de cada lote, obteniendo los siguientes resultados:*

$$38'7 \quad 40'4 \quad 37'2 \quad 36'6 \quad 35'9 \quad 34'7 \quad 37'6 \quad 35'1 \quad 37'5 \quad 35'6$$

Asumiendo que el rendimiento sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, *con* $\sigma = 3$, *calcular:*

a) La distribución a posteriori para la media μ *usando una distribución a priori* $N(30, 10)$.

b) El test correspondiente para saber si el rendimiento ha mejorado ($H_0 : \mu \leq 35$ vs. $H_1 : \mu > 35$) *al* 5 % *de nivel de significación.*

Ejercicio 6.9 *Ej. 11.70 [Spiegel et al., 2013]*

Se sabe que el tiempo de vida media (en horas) de focos fluorescentes que produce una compañía corresponde a una distribución normal con una media μ *desconocida y desviación estándar de* 120 *horas. La densidad a priori es normal con media* $m = 1580$ *horas y varianza* $s^2 = 16900$. *El tiempo de vida media calculado a partir de una muestra de* 100 *focos es* 1630 *horas. Probar la hipótesis nula,* $H_0 : \mu \leq 1600$ *horas, frente a la hipótesis alternativa,* $H_1 : \mu > 1600$ *horas, usando un test de hipótesis bayesiano al* $0'05$ *de nivel de significación.*

Ejercicio 6.10 *Ej. 12.3 [Bolstad, 2007]*

Una organización de consumidores está preocupada por el consumo de electricidad por parte de los usuarios particulares durante los meses de invierno. Para estudiar la cuestión se tomó una muestra de 25 *contadores eléctricos residenciales durante los meses de noviembre, diciembre, enero y febrero. Los costes fueron:*

514	536	345	440	427	443	386	418	364	483	480	334	324
	506	385	410	561	275	306	294	402	350	343	414	296

Asumiendo que la electricidad consumida durante los cuatro meses sigue una distribución normal de media μ y desviación típica, $\sigma = 80$,

a) Encontrar la distribución a posteriori para μ asumiendo una distribución a priori $N(325, 80)$.

b) Calcular el intervalo de credibilidad bayesiano al 95 %.

c) Realizar el test de hipótesis bayesiano, $H_0 : \mu = 350$ frente a, $H_1 : \mu \neq 350$

d) Realizar el test de hipótesis bayesiano, $H_0 : \mu \leq 350$ frente a, $H_1 : \mu > 350$

Referencias

[Bolstad, 2007] Bolstad, W. M. (2007). *Introduction to Bayesian Statistics.* John Willey & Sons, Hoboken, New Jersey.

[Spiegel et al., 2013] Spiegel, M. R., Schiller, J., and Srinivasan, R. A. (2013). *Probabilidad y estadística.* Schaum. Mc Graw Hill.