MÉTODOS MATEMÁTICOS I
Curso 2013–14

Tema 1

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + y\mathrm{i}$:

a) $(2+3\mathrm{i})+(4+\mathrm{i})$; b) $(2+3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$; c) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}}$; d) $(2+3\mathrm{i})^3$; e) $\dfrac{3\mathrm{i}^{30}-\mathrm{i}^{19}}{2\mathrm{i}-1}$;

f) $(1+\mathrm{i})^{25}$; g) $\dfrac{\big(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^{15}}{(1-\mathrm{i})^{20}}+\dfrac{\big(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^{15}}{(1+\mathrm{i})^{20}}$.

2. Resolver la ecuación $z^2 - 8\mathrm{i}z - (19-4\mathrm{i}) = 0$.

3. Expresar $\cos 5x$ y $\operatorname{sen} 5x$ en función de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

4. Calcular todos los valores de: a) $\sqrt{1-\mathrm{i}}$; y b) $\sqrt[6]{-8}$.

5. Demostrar la identidad de Lagrange,

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}\big[(n+\frac{1}{2})\theta\big]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}.$$

¿Qué ocurre cuando $\operatorname{sen}(\theta/2)=0$?

6. Desarrollar en serie de Fourier $\cos^4\theta$.

7. Expresar en la forma $x + y\mathrm{i}$: a) $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}}$; b) $\operatorname{sen}(1+\mathrm{i})$; c) $\cos(2+3\mathrm{i})$; y d) $\cot(\pi/4-\mathrm{i}\log 2)$.

8. Calcular todos los valores de: a) $\log(-\mathrm{i})$; b) $\log(1+\mathrm{i})$; c) $(-\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$; d) 2^{i}; y e) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathrm{i}}$.

9. Si $z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$, calcular todos los valores de: a) $|z^{\mathrm{i}}|$; b) $|\mathrm{i}^z|$; y c) $|z^z|$ en función de x, y, r y θ.

10. Resolver las siguientes ecuaciones: a) $\cos z = 4$; b) $\tan z = 3\mathrm{i}/5$; c) $\tan z = \mathrm{i}$; y d) $\operatorname{sen} z + \cos z = \mathrm{i}\sqrt{2}$.

11. Demostrar que si f es una función analítica y una cualquiera de las funciones $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$ ó $\operatorname{Arg} f$ es constante, entonces f es constante.

12. Encontrar todas las funciones analíticas cuya parte real es de la forma $u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, donde a, b, c y d son constantes reales. Expresar el resultado en función de z.

13. Encontrar todas las funciones analíticas $f(z)$ cuya parte real es de la forma $g(x)\cos y$, expresando el resultado en función de la variable compleja $z = x + \mathrm{i}y$.

Tema 2

14. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a)}\ \int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}\,;\qquad \text{b)}\ \int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}\,;\qquad \text{c)}\ \int_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z}\,;\qquad \text{d)}\ \int_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|.$$

15. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_\gamma (z^3+3)\,\mathrm{d}z$, donde γ es la mitad superior de la circunferencia unidad (orientada positivamente);

b) $\int_\gamma \mathrm{e}^{1/z}\mathrm{d}z$, donde γ es la circunferencia de radio 3 centrada en $1+5\mathrm{i}$;

c) $\int_\gamma z^2(z-1)^{-1}\mathrm{d}z$, donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio 2;

d) $\int_\gamma z^{-3}\mathrm{d}z$, donde γ es el cuadrado de vértices $-1-\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, y $-1+\mathrm{i}$;

e) $\int_\gamma z^{-4}\operatorname{sen} z\,\mathrm{d}z$, donde γ es la circunferencia unidad;

f) $\int_{|z|=2} z^{-2}\,|z|\,\mathrm{e}^z\mathrm{d}z$.

16. Sea f analítica en el disco $|z|<R$ con $R>1$. Calcular $\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cos^2(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta$ en función de f y sus derivadas evaluadas en el origen.

17. Sea f una función entera tal que $|f(z)|\geqslant 1$ en todo el plano complejo. Demostrar que f es constante.

Tema 3

---

18. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\mathrm{i}n)}{2^n};\qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\operatorname{sen}(\mathrm{i}n)}{3^n};\qquad \text{c)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\log n};\qquad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}n)^2};\qquad \text{e)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5+12\mathrm{i}}\right)^n.$$

19. Encontrar un dominio en el que la función $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(2z-1)^n/n$ sea analítica.

20. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} nz^n\,;\qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n\mathrm{e}^{-n}\,;\qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\,n^{-n}z^n\,;\qquad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}z^n.$$

21. Calcular los desarrollos en serie de Taylor de las siguientes funciones en torno al punto z_0 indicado, especificando los correspondientes radios de convergencia: a) e^z, $z_0=1$; b) z^{-1}, $z_0=1$; c) $z^2\mathrm{e}^z$, $z_0=0$; d) $\mathrm{e}^z\operatorname{sen} z$, $z_0=0$; e) e^{z^2}, $z_0=0$; y f) $(z-1)^{-1}(z-2)^{-1}$, $z_0=0$.

22. Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor de $\tan z$ en $z_0=0$.

23. Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen de la función $f(z)=\operatorname{Log}(\cos z)$.

24. Calcular los tres primeros coeficientes no nulos y el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen de la función $f(z)=\sqrt{\cos z}$, considerando únicamente la determinación principal de la raíz.

25. Encontrar las coronas de convergencia de las siguientes series de Laurent:

$$\text{a)}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^n z^n;\qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^n;\qquad \text{c)}\ \frac{27}{35z^4}-\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!};$$

$$\text{d)}\ z+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-n)!\,z^n;\qquad \text{e)}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{2^n+3^n}.$$

26. Calcular los desarrollos en serie de Laurent de las siguientes funciones en las coronas que se indican:

a) $\operatorname{sen}(z^{-1})\,,\ 0<|z|<\infty\,;$ b) $\dfrac{z}{z+1}\,,\ 0<|z|<1\,;$ c) $\dfrac{z}{z+1}\,,\ 1<|z|<\infty\,;$

d) $\dfrac{e^z}{z^2}\,,\ 0<|z|<\infty\,;$ e) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}\,,\ 0<|z|<1\,;$ f) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}\,,\ 1<|z|<2\,;$

g) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}\,,\ |z|>2\,.$

27. Calcular el desarrollo de Laurent de la función $f(z)=\dfrac{3(z-1)}{(2z-1)(z-2)}$ en la corona $\frac{1}{2}<|z-1|<1$.

28. Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = 1/(z^2 \operatorname{senh} z)$ en una corona de la forma $0<|z|<R$. ¿Cuál es el mayor valor posible de R?

29. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{z}{(e^z-1)(e^z-2)}\,;$ b) $\dfrac{(z-1)^2(z+3)}{1-\operatorname{sen}(\pi z/2)}\,;$ c) $e^{z-\frac{1}{z}}\,;$ d) $\dfrac{e^{1/(z-1)}}{e^z-1}\,;$ e) $e^{\cot(z^{-1})}$.

Tema 4

---

30. Sea la función $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4iz-3}$. i) Hallar el desarrollo de Laurent de f en la corona $1<|z|<3$. ii) Calcular la integral $\displaystyle\int_{|z-3i|=1} f(z)\,dz$.

31. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{|z|=8} \tan z\,dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=3} (1+z+z^2)\left(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-5)}\right)dz$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)\,d\theta}{5-4\cos\theta}$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\operatorname{sen}\theta)^2}$

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{x^4+x^2+1}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}(3x)\cos(2x)}{x^2+1}\,dx$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,e^{i\omega x}}{(x^2+1)^2}\,dx\,,\quad \omega\in\mathbb{R}$

i) $\displaystyle\int_{|z-1|=3} z^3\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)dz$

j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2-3ix-2}\,dx\,,\quad \omega\in\mathbb{R}$

k) $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}\omega x}{x^4+1}\,dx\,,\quad \omega\in\mathbb{R}$

Tema 5

32. Integrar las ecuaciones siguientes:

a) $(5x + 2y - 3)y' = 9 - 12x - 5y$; b) $y' = e^{x-y}$; c) $y' = y + \operatorname{sen} x$; d) $y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}$;
e) $y' = \cos x - y - y^2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$; f) $y' = \frac{x+2y}{x}$; g) $y' = \frac{y}{x+y^3}$; h) $y' = x + \frac{x}{y}$;
i) $y' = 1 - \frac{2}{x+y}$; j) $(y')^2 = 9y^4$.

33. Sea la ecuación $3y^2 - x + 2y(y^2 - 3x)y' = 0$. i) Hallar un factor integrante de la forma $\mu(x + y^2)$. ii) Determinar la solución general de la ecuación.

34. Comprobar que una ecuación de la forma $y' = x^{n-1} f(y + ax^n)$ se convierte en una de variables separadas haciendo el cambio $z = y + ax^n$. Hallar por este método la solución general de $y' = 2x(y + x^2)^2$.

35. Hallar la solución general y discutir la existencia y unicidad de soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $y' = (x - 4y)^{-2}$; b) $y' = \frac{y-y^2}{x}$; c) $y' = \frac{3xy+2y^2}{x^2+xy}$; d) $y' = 1 - y^{-2}$; e) $y' = \frac{x}{y} - xy$;
f) $y' = 1 + y^{2/3}$.

36. Integrar la ecuación diferencial $y' = y\frac{y+2x-1}{x+y}$. ¿Cuántas soluciones verifican $y(0) = 0$?

37. Sea la ecuación diferencial $y' = \frac{y}{x} + e^{-y/x}$. i) Calcular su solución general. ii) Hallar las soluciones que pasan por el punto $(e, 0)$ y las que lo hacen por $(1, 1)$.

38. Sea la ecuación $y' = 1 + \frac{2}{y-x}$. i) Hallar su solución general. ii) Determinar todas las soluciones que satisfacen $y(1) = -1$. iii) Dibujar aproximadamente sus curvas integrales.

39. Sea la familia de hipérbolas $xy = c$. Escribir la ecuación diferencial de la que son curvas integrales. Hallar las trayectorias ortogonales a ellas (las curvas que las cortan perpendicularmente). Resolver el mismo problema para las circunferencias $x^2 + y^2 = 2cx$ y las parábolas $y^2 + 2cx = c^2$.

40. Sea la ecuación $xy' = (1 - x)y + x^2$. i) Hallar su solución general. ii) Para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, discutir cuántas soluciones cumplen la condición inicial $y(x_0) = y_0$. iii) Localizar los puntos del plano en los que $y'' = 0$.

41. Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3y}{x} + 3(x^2 + 1)y^{2/3} .$$

Determinar por cuáles de los siguientes puntos del plano pasa una única curva integral de la ecuación: a) $(1, 1)$; b) $(-1, 1)$; c) $(1, 0)$; d) $(0, 1)$.

42. Sea la ecuación diferencial $y' = \frac{y^2}{2x(y-x)}$. i) Hallar su solución general. ii) Hallar las soluciones que verifican $y(1) = 0$ e $y(1) = 2$. iii) Determinar por qué puntos del plano pasa una única curva integral.

Temas 6 y 7

43. Escribir la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $u'' - u = e^{2x}$; b) $u'' + u = xe^x \cos x$; c) $u'' + u = \tan x$; d) $u''' + 2u'' + 5u' = 5x$;
e) $u^{(4)} + 4u = xe^x \cos x$; f) $(x + 1)u'' - u' = (x + 1)^2$; g) $x^2u'' - 2u = x^3e^x$;
h) $x^2u'' - x(x + 2)u' + (x + 2)u = 0$.

44. Hallar las soluciones de los problemas de valores iniciales siguientes:

a) $\begin{cases} u''' + 5u'' + 8u' + 4u = -8\mathrm{e}^{-2x} \\ u(0) = 1,\ u'(0) = -1,\ u''(0) = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u'' + u' = f(x) \\ u(0) = -1,\ u'(0) = 0\,, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x+1\,, & x \leqslant 1 \\ 3-x\,, & x \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3u''' + x^2u'' - 2xu' + 2u = 2x^4 \\ u(1) = u'(1) = u''(1) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} xu'' - (x+1)u' + u = x^2\mathrm{e}^x \\ u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u'' + 2xu' = 2x \\ u(1) = u'(1) = 1\,. \end{cases}$

45. Sea la ecuación $u''' + 5u'' + 4u' + cu = x$. i) Hallar una solución particular para todo valor de la constante real c. ii) Hallar la solución general para $c = -10$.

46. Considérese la ecuación $u''' + 2u'' + (1+a)u' + 4a^2u = \mathrm{e}^{-x}$, con $a \in \mathbb{R}$. i) Para $a = 0$, hallar la solución que satisface $u(0) = u'(0) = 0\,,\ u''(0) = -1$. ii) Hallar una solución particular de la ecuación para $a \neq 0$.

47. Hallar la solución general de la ecuación $u^{(4)} - 2u''' + 2u'' - 2u' + u = 2\cosh x$.

48. Resolver la ecuación de tercer orden

$$x^3u''' - 3x^2u'' - x(x^2-6)\,u' + (x^2-6)\,u = 0\,.$$

49. Resolver la ecuación diferencial

$$uu'' - u'^2 = u'\,,$$

efectuando el cambio de variable $u' = v(u)$.

50. Resolver los problemas de valores iniciales siguientes:

a) $y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y,\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; b) $y' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y,\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; c) $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} y,\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

51. Hallar la solución general de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = -y_2 + y_3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \\ y_3' = y_1 - y_3\,. \end{cases}$

52. Hallar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x - 4y + 2z \\ y' = x - 3y + z \\ z' = x - 2y + 1 \\ x(0) = 2\,,\ y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$$

53. Hallar la solución de los problemas de valores iniciales siguientes:

a) $\begin{cases} x' = x - 2y - t \\ y' = 2x - 3y - t \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4t\mathrm{e}^{3t} \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 2x - y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + |2-t| \\ x(0) = 0,\ y(0) = -1\,. \end{cases}$

54. Considérese el sistema $y' = Ay + b(x)$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $b(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y sea $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hallar la matriz fundamental $\Phi(x)$ del sistema homogéneo con $\Phi(0) = \mathbb{1}$, y la solución del inhomogéneo con $y(0) = y_0$.

55. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x' = 4y + z \\ y' = z - 4 \\ z' = 5z - 2x \end{cases}$$

que verifica $x(0) = -2$, $y(0) = 3$, $z(0) = 0$. [Ayuda: el sistema tiene una solución constante.]

56. Sea el sistema

$$y' = Ay\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar la matriz fundamental canónica en el origen para *todos* los valores de α.

Soluciones Tema 1

1. a) $6+4\mathrm{i}$; b) $5+14\mathrm{i}$; c) $\dfrac{11}{17}+\dfrac{10}{17}\mathrm{i}$; d) $-46+9\mathrm{i}$; e) $1+\mathrm{i}$; f) $=2^{12}(1+\mathrm{i})$; g) -64 .

2. $-2+5\mathrm{i}$, $2+3\mathrm{i}$.

3. $\cos 5x=\cos^5 x-10\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x+5\operatorname{sen}^4 x\cos x$, $\operatorname{sen} 5x=\operatorname{sen}^5 x+5\operatorname{sen} x\cos^4 x-10\operatorname{sen}^3 x\cos^2 x$.

4. a) $\pm\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\pm\sqrt{3}\pm\mathrm{i}\big)$, $\pm\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

6. $\cos^4\theta=\frac{1}{8}\big(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta\big)$.

7. a) $\mathrm{e}^2(\cos 1+\mathrm{i}\operatorname{sen} 1)$; b) $\operatorname{sen} 1\cosh 1+\mathrm{i}\operatorname{senh} 1\cos 1$; c) $\cos 2\cosh 3-\mathrm{i}\operatorname{sen} 2\operatorname{senh} 3$; d) $\dfrac{8}{17}+\dfrac{15}{17}\mathrm{i}$.

8. a) $-\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}+2n\pi\mathrm{i}$; b) $\dfrac{1}{2}\log 2+\dfrac{\mathrm{i}\pi}{4}+2n\pi\mathrm{i}$; c) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$; d) $\mathrm{e}^{2n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\log 2}$; e) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}$, donde $n\in\mathbb{Z}$ en todos los casos.

9. a) $\mathrm{e}^{2n\pi-\theta}$; b) $\mathrm{e}^{y\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)}$; c) $\mathrm{e}^{x\log r+y(2n\pi-\theta)}$, donde $n\in\mathbb{Z}$ en todos los casos.

10. a) $\pm\mathrm{i}\log\big(4+\sqrt{15}\big)+2n\pi$; b) $\mathrm{i}\log 2+n\pi$; c) no existe solución ;

d) $\mathrm{i}\log(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $\mathrm{i}\log(\sqrt{2}-1)+\frac{3\pi}{4}+2n\pi$, donde $n\in\mathbb{Z}$ en todos los casos.

12. $c=-3a$, $b=-3d$, $f(z)=(a+\mathrm{i}d)\,z^3+\mathrm{i}k$, con $k\in\mathbb{R}$.

13. $f(z)=a\,\mathrm{e}^z+b\,\mathrm{e}^{-z}+\mathrm{i}c$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Soluciones Tema 2

14. a) $2\pi\mathrm{i}$; b) 0 ; c) 0 ; d) 2π .

15. a) -6 ; b) 0 ; c) $2\pi\mathrm{i}$; d) 0 ; e) $-\dfrac{\pi\mathrm{i}}{3}$; f) $4\pi\mathrm{i}$.

16. $\pi\big(f(0)+\frac{1}{2}f'(0)\big)$.

Soluciones Tema 3

18. a) diverge; b,d,e) convergen absolutamente; c) converge (pero *no* absolutamente).

19. $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

20. a), d) $R=1$; b), c) $R=\mathrm{e}$.

21. a) $\mathrm{e}^z=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}}{k!}(z-1)^k$, $R=\infty$; b) $\dfrac{1}{z}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k$, $R=1$.

c) $z^2 e^z = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{(k-2)!}$, $R=\infty$;   d) $e^z \operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)\frac{z^k}{k!}$, $R=\infty$;

e) $e^{z^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!}$, $R=\infty$;   f) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)z^k$, $R=1$.

22. $\tan z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \cdots$, $|z| < \dfrac{\pi}{2}$.

23. $\operatorname{Log}(\cos z) = -\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{12} z^4 - \frac{1}{45} z^6 + \cdots$, $|z| < \dfrac{\pi}{2}$.

24. $\sqrt{\cos z} = 1 - \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^4}{96} + \cdots$, $|z| < \dfrac{\pi}{2}$.

25. a) diverge para todo z;   b) $C\left(0; \frac{1}{2}, \infty\right)$;   c) $\mathbb{C}-\{0\}$;   d) diverge para todo z;   e) $C(0; 2, 3)$.

26. a) $\operatorname{sen}(z^{-1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}}$;   b) $\dfrac{z}{z+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}z^k$;   c) $\dfrac{z}{z+1} = -\dfrac{1}{z+1}+1$;

d) $\dfrac{e^z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}$;   e) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{2z} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{k+2}}\right)z^k$;

f) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)} = -\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{z^k} - \frac{1}{2z} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+2}}$;   g) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)} = \displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2^{k-2}-1}{z^k}$.

27. $\dfrac{3(z-1)}{(2z-1)(z-2)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\frac{1}{(z-1)^k} - \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k$.

28. $\dfrac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{6z} + \dfrac{7z}{360} + \cdots$, $0 < |z| < \pi$.

29. a) 0 (singularidad evitable), $2k\pi i$ con $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ (polos simples), $\log 2 + 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$ (polos simples);
b) $4k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$ (polos dobles si $k \neq 0, -1$, polo simple si $k=-1$, singularidad evitable si $k=0$);
c) 0 (singularidad esencial);
d) 1 (singularidad esencial), $2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$ (polos simples);
e) 0 (singularidad no aislada), $\dfrac{1}{k\pi}$ con $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ (singularidades esenciales).

Soluciones Tema 4

30. i) $f(z) = \left(i - \dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{k-1}}{z^k} + \left(i-\frac{3}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}i^{k+1}}$.   ii) $\pi(2+3i)$.

31. a) $-12\pi i$;   b) $\dfrac{38\pi i}{3}$;   c) $\dfrac{\pi}{12}$;   d) $\dfrac{5\pi}{32}$;   e) $\dfrac{\pi}{200}$;   f) $-\dfrac{\pi e^{-\sqrt{3}\pi}}{2\sqrt{3}}$;   g) $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^5}\right)$;

h) $\dfrac{\mathrm{i}\pi\omega}{2}\,\mathrm{e}^{-|\omega|}$; i) $-\dfrac{143\pi\mathrm{i}}{12}$; j) $\begin{cases} 2\pi(\mathrm{e}^{-2\omega}-\mathrm{e}^{-\omega}), & \omega>0, \\ 0, & \omega\leqslant 0; \end{cases}$ k) $\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-\omega}\operatorname{sen}\omega$.

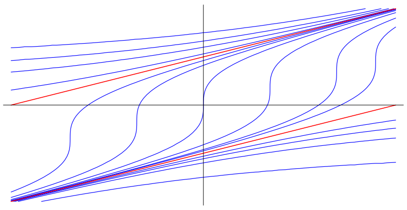
Soluciones Tema 5

32. a) $y^2+6x^2+5xy-3y-9x=c$; b) $y=\log(c+\mathrm{e}^x)$; c) $y=c\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}(\operatorname{sen}x+\cos x)$;
d) $y=\dfrac{x^2}{c+x}$; e) $y=\cos x+\dfrac{2\cos^2 x}{c\mathrm{e}^x-\cos x-\operatorname{sen}x}$; f) $y=cx^2-x$; g) $x-cy-\frac{1}{2}y^3=0$;
h) $y-\frac{1}{2}x^2-\log|1+y|=c$; i) $y-x+\log|x+y-1|=c$; j) $y=\dfrac{1}{c\pm 3x}$.

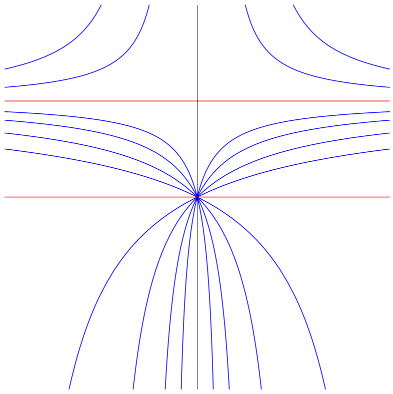
33. i) $\mu=\dfrac{1}{(x+y^2)^3}$. ii) $\dfrac{x-y^2}{(x+y^2)^2}=c$.

34. i) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}z}{f(z)+na}=\frac{x^n}{n}+c$. ii) $y=\tan(x^2+c)-x^2$.

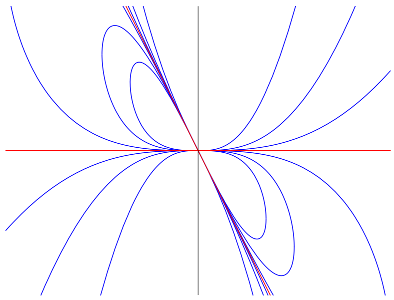
35. Como información adicional se ha incluido el dibujo de las curvas integrales.



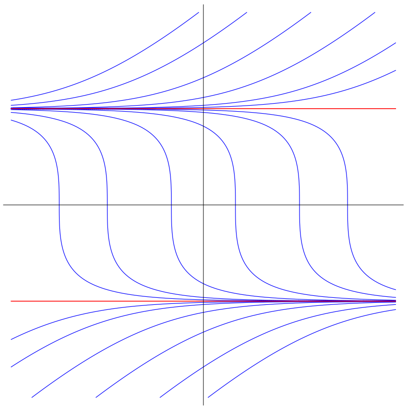
a) $4y+\log\left|\dfrac{x-4y+2}{x-4y-2}\right|=c$



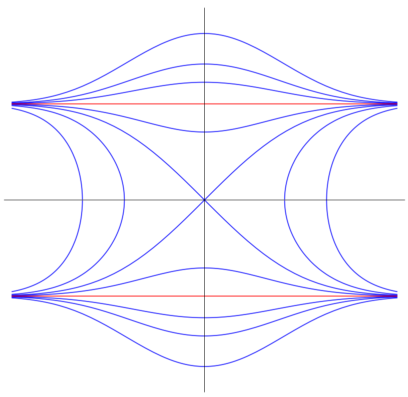
b) $y=\dfrac{x}{x+c}$



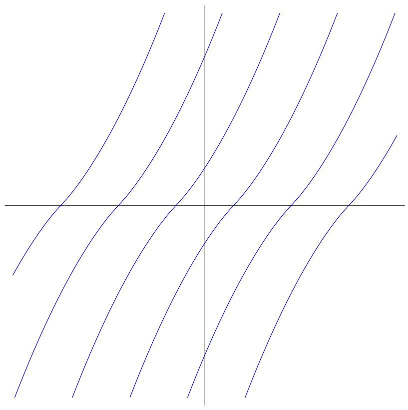
c) $y^2+2xy+cx^4=0$



d) $y+\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1-y}{1+y}\right|=x+c$



e) $y^2=1+c\mathrm{e}^{-x^2}$

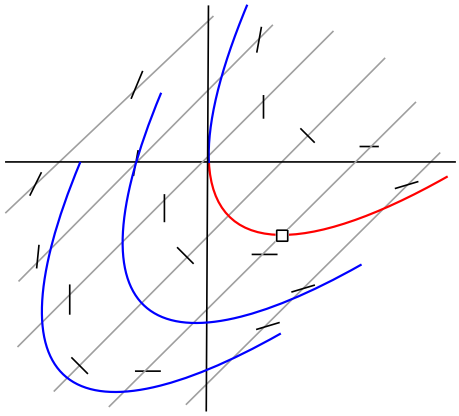


f) $y^{1/3}-\arctan y^{1/3}=\dfrac{x}{3}+c$

36. Solución general: $y^2+2xy-c\mathrm{e}^{2x}=0$. Las soluciones que verifican $y(0)=0$ son $y(x)=0$ e $y(x)=-2x$.

37. i) $y=x\log\big(\log|x|+c\big)$. ii) $(\mathrm{e},0)$: $y=x\log\big(\log|x|\big)$; $(1,1)$: $y=x\log\big(\log|x|+\mathrm{e}\big)$.

38. $y = x \pm 2\sqrt{x+c}$. ii) $y = x - 2\sqrt{x}$



39. $xy = c \Rightarrow y + xy' = 0$. Trayectorias ortogonales: $y' = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 - y^2 = k$.
$x^2 + y^2 = 2cx \Rightarrow y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$. Trayectorias ortogonales: $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = ky$.
$y^2 + 2cx = c^2 \Rightarrow yy' = -x \pm \sqrt{y^2+x^2}$. Trayectorias ortogonales: $y' = \frac{y}{x \pm \sqrt{y^2+x^2}} \Rightarrow y^2 + 2kx = k^2$.

40. i) $y = x(1 + ce^{-x})$. ii) Solución única si $x_0 \neq 0$, infinitas soluciones si $x_0 = y_0 = 0$, ninguna solución si $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$. iii) $y = x$ (recta solución), $x = 2$ (curva de puntos de inflexión).

41. Solución general: $y = x^3\left(\frac{x^2}{2} + \log|x| + c\right)^3$ $(c \in \mathbb{R})$, $y \equiv 0$. Curva integral única: (1, 1), (−1, 1) y (0, 1).

42. i) Solución general: $y(y-2x) = cx$. ii) $y(1) = 0$: $y = 0$; $y(1) = 2$: $y = 2x$. iii) Por cada punto del plano salvo el origen pasa una única curva integral, mientras que por el origen pasan infinitas.

Soluciones Temas 6 y 7

---

43. a) $u = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$;

b) $u = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{25}\big[(5x-2)\cos x + (10x-14)\operatorname{sen} x\big]e^x$;

c) $u = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \,\log|\sec x + \tan x|$;

d) $u = c_1 + (c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x)e^{-x} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{5}$;

e) $u = (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)e^x + (c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)e^{-x} + \frac{x}{32}\big[(3-x)\cos x + x \operatorname{sen} x\big]e^x$;

f) $u = c_1(x^2 + 2x) + c_2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$;

g) $u = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x} + \big(x - 2 + \frac{2}{x}\big)e^x$;

h) $u = c_1 x + c_2 x e^x$.

44. a) $u(x) = e^{-x} + 4x^2 e^{-2x}$; b) $u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1, & x \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 + 2e^{1-x}, & x \geqslant 1; \end{cases}$

c) $u(x) = \frac{1}{15}\left(x^4 - 5x^2 + 5x - \frac{1}{x}\right)$; d) $u(x) = (x+1)e + \frac{1}{2}(x^2-5)e^x$; e) $u(x) = x$.

45. i) $u_p = \begin{cases} \dfrac{x}{c} - \dfrac{4}{c^2}, & c \neq 0 \\ \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{5x}{16}, & c = 0. \end{cases}$ ii) $u = c_1 e^x + e^{-3x}(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) - \dfrac{x}{10} - \dfrac{1}{25}$.

46. i) $u = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x}$. ii) $u_p = \begin{cases} 4xe^{-x}, & a = \frac{1}{4} \\ \dfrac{e^{-x}}{a(4a-1)}, & a \neq 0,\ \frac{1}{4}. \end{cases}$

47. $u(x)=\mathrm{e}^x\left(c_1+c_2x+\frac{x^2}{4}\right)+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen}x+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{8}$.

48. $u(x)=x\big(c_1+c_2\,\mathrm{e}^x+c_3\,\mathrm{e}^{-x}\big)$.

49. $u=c_1\mathrm{e}^{c_2x}+\dfrac{1}{c_2}$.

50. a) $y(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-3x}\\ \mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-3x}\end{pmatrix}$ b) $y(x)=\mathrm{e}^x\begin{pmatrix}1+2x\\ x\end{pmatrix}$ c) $y(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}-3x\mathrm{e}^{-2x}\\ \mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}-2x\mathrm{e}^{-2x}\\ \mathrm{e}^{-x}-4x\mathrm{e}^{-2x}\end{pmatrix}$.

51. a) $y=c_1\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+c_3\begin{pmatrix}1\\1+x\\-x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}$; b) $y=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}$;

c) $y=c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}$.

52. $x=2t+2\mathrm{e}^{-t}$, $y=t+\mathrm{e}^{-t}$, $z=1+t$.

53. a) $(1-t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{16}\begin{pmatrix}(8t^2-4t+17)\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t}\\(8t^2+12t+13)\mathrm{e}^{3t}+3\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$; c) $\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t+2\cos\sqrt{2}\,t\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}t\\2t-1\end{pmatrix}$ si $t\leqslant 2$, $\begin{pmatrix}-t+(8-2t)\mathrm{e}^{t-2}\\1-2t+(10-2t)\mathrm{e}^{t-2}\end{pmatrix}$ si $t\geqslant 2$.

54. $\Phi(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&\operatorname{sen}x&0\\0&\cos x&0&-\operatorname{sen}x\\-\operatorname{sen}x&0&\cos x&0\\0&\operatorname{sen}x&0&\cos x\end{pmatrix}$. Solución pedida del sistema inhomogéneo: $\begin{pmatrix}\cos x-2x\\0\\x^2-2-\operatorname{sen}x\\0\end{pmatrix}$.

55. $x=10-12\mathrm{e}^{-t}$, $y=-1+4\mathrm{e}^{-t}$, $z=4-4\mathrm{e}^{-t}$.

56.

$$\alpha\neq-1:\ \mathrm{e}^{xA}=\frac{1}{\alpha+1}\begin{pmatrix}\alpha\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\alpha x}&\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-\alpha x}\\ \alpha(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-\alpha x})&\mathrm{e}^x+\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\end{pmatrix};\qquad \alpha=-1:\ \mathrm{e}^{xA}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^x(1-x)&x\mathrm{e}^x\\-x\mathrm{e}^x&\mathrm{e}^x(1+x)\end{pmatrix},$$