Prof. Maurizio Mattesini

OSCILACIONES Y ONDAS

Capítulo 14

Oscilaciones

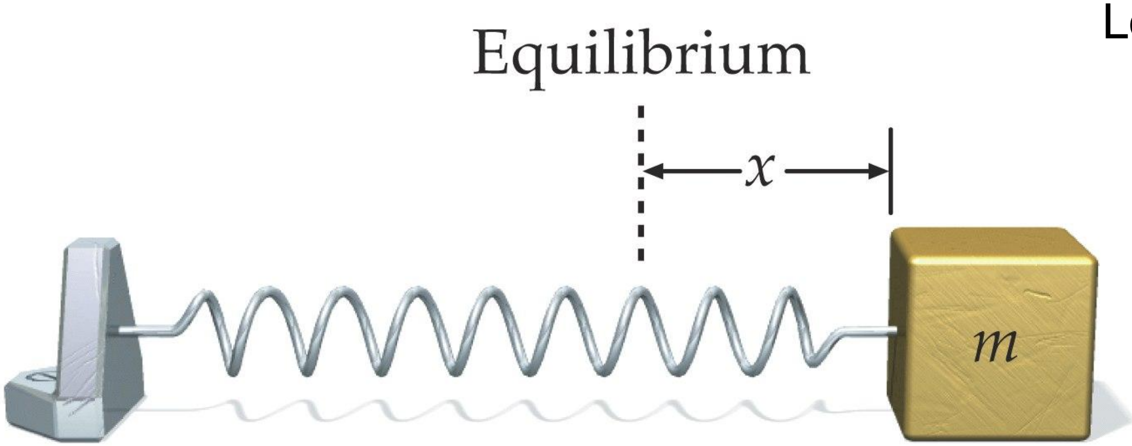
Capítulo 14

1. Movimiento armónico simple (MAS)
2. Energía del MAS
3. Algunos sistemas oscilantes
4. Oscilaciones amortiguadas
5. Oscilaciones forzadas y resonancia

Ejemplo de oscilaciones

…los balanceos de los barcos, los péndulos del reloj, las cuerdas de los instrumentos musicales, oscilaciones de las moléculas, ondas sonoras y corriente eléctrica (radio y Tv).

Movimiento armónico simple (MAS)



Ley de Hook:

$$\boxed{F_x = -kx}$$

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

es decir,

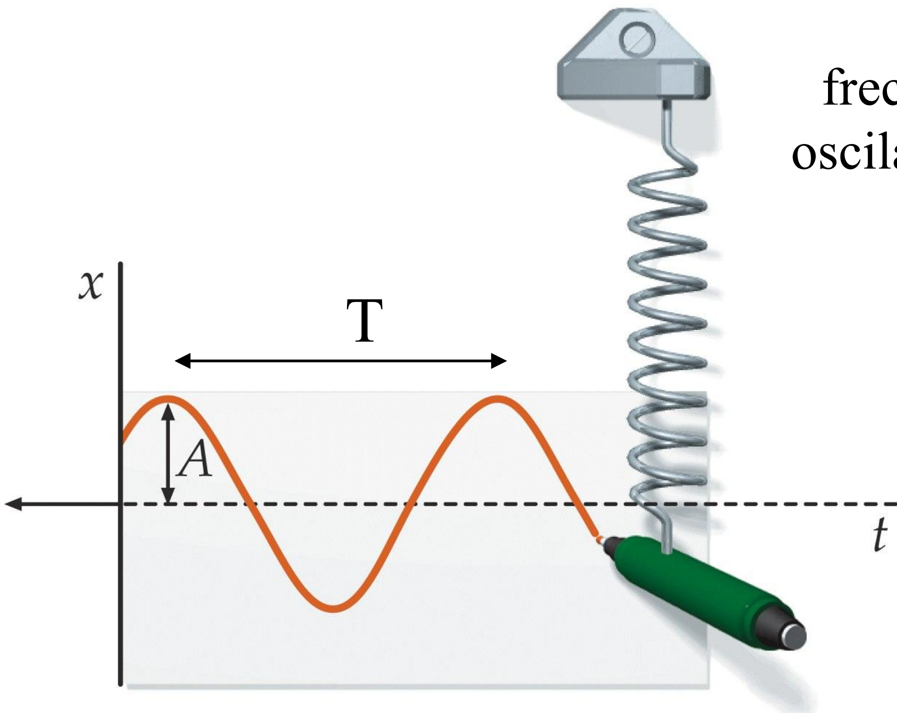
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional a su desplazamiento pero con sentido puesto, el objeto se moverá con **movimiento armónico simple**.

CONDICIONES DEL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

k: constante del muelle que depende de su rigidez.

Determinación experimental



frecuencia: numero de oscilaciones por segundo (ciclo/s → Hz)

$$\boxed{f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}}$$

Periodo (s)

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\cos(\omega t+\delta)=sen\left(\omega t+\delta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x=A\cos(\omega t+\delta)$$

POSICIÓN EN UN MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

A: amplitud
(ωt+ δ): fase
δ: constante de fase
ω: frecuencia angular (rad/s)

Si tenemos sólo un sistema oscilante **siempre podemos elegir t=0 de modo que δ=0**. Si tenemos dos sistemas oscilantes con igual amplitud y frecuencia, pero diferente fase, podemos elegir δ=0 para uno de ellos.

Sistemas en fase o fuera de fase

$$x_1 = \cos(\omega t)$$
$$x_2 = \cos(\omega t + \delta)$$

Si la **diferencia de fase δ es 0** ó un número de veces 2π, entonces **$x_2 = x_1$** y se dice que los sistemas **están en fase**. Si la **diferencia de fase δ es π** o un número entero impar de veces π, entonces **$x_2 = -x_1$** y se dice que los sistemas están **fuera de fase en 180º**.

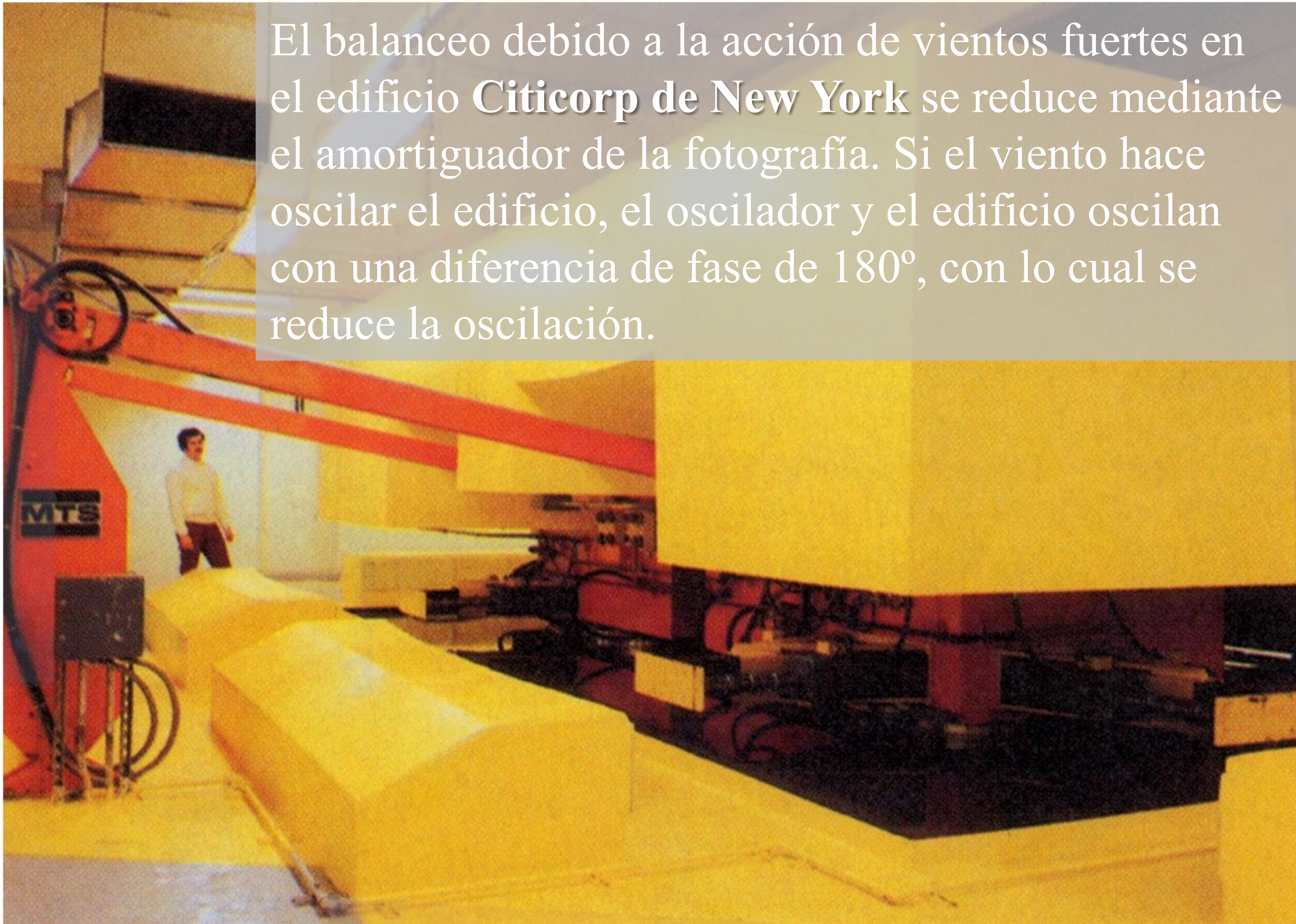
$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega sen(\omega t + \delta)$$

VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

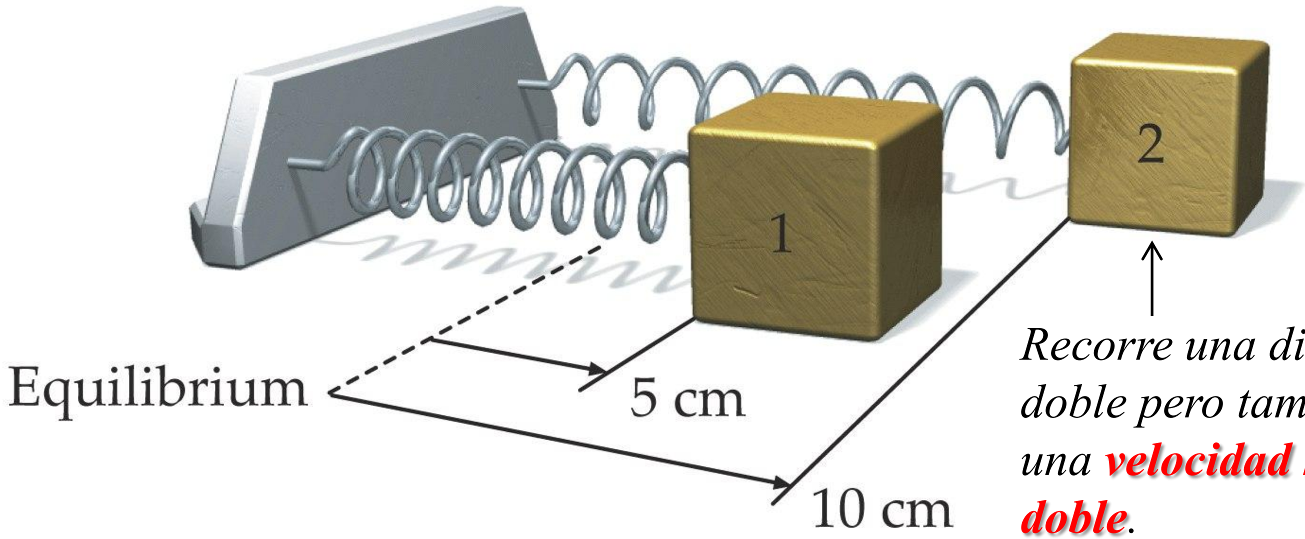
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

El balanceo debido a la acción de vientos fuertes en el edificio **Citicorp de New York** se reduce mediante el amortiguador de la fotografía. Si el viento hace oscilar el edificio, el oscilador y el edificio oscilan con una diferencia de fase de 180º, con lo cual se reduce la oscilación.



Dos sistemas masa-muelle idénticos



Recorre una distancia doble pero también posee una ***velocidad media doble***.

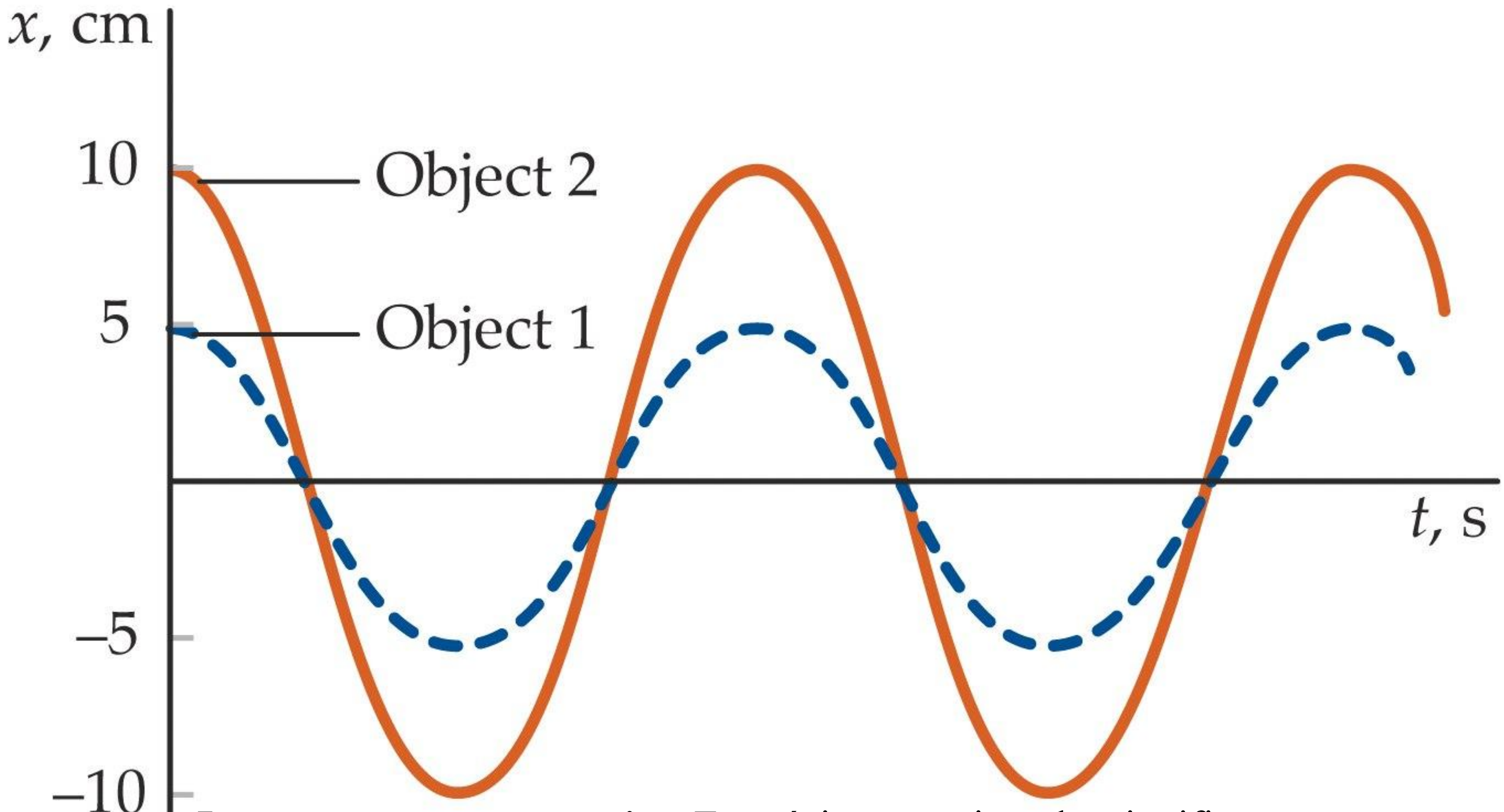
¿Cuál de los dos cuerpos alcanza primero la posición de equilibrio?

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

FRECUENCIA Y PERIODO DE UN OBJETO LIGADO A UN MUELLE

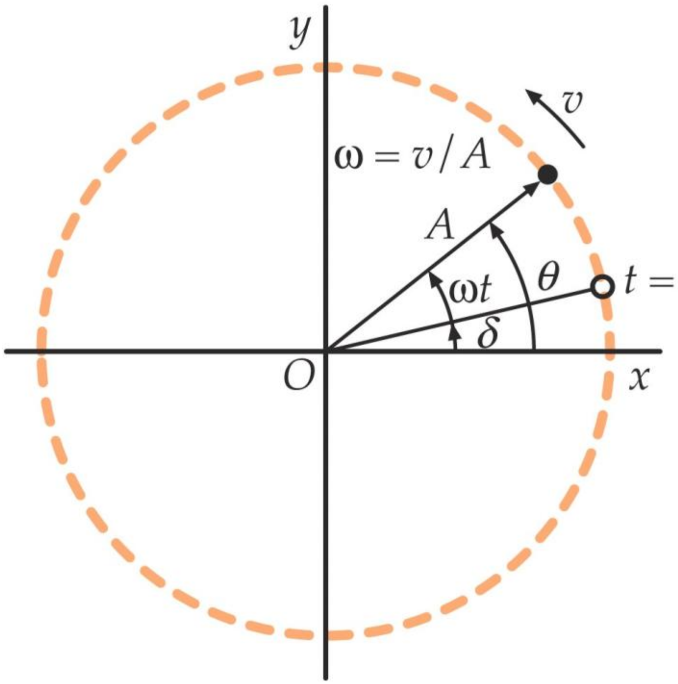
Según esta ecuación el periodo depende sólo de k y m, pero no de la amplitud. Como k y m son los mismos para ambos sistemas, **los periodos son iguales**. Por lo tanto los objetos alcanzan la posición de equilibrio **al mismo tiempo**.

En el movimiento armónico simple, la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.

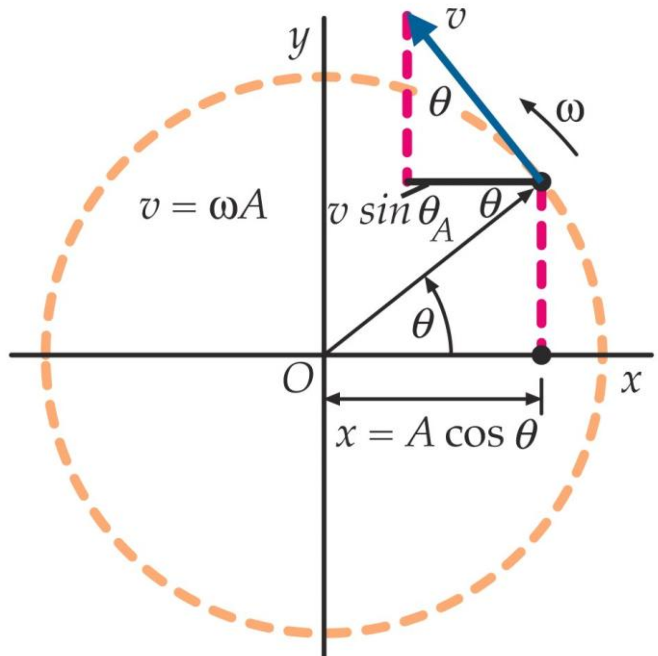


Importantes consecuencias: En música, por ejemplo, significa que el **tono** (frecuencia) de una nota que se toca en un piano no depende de la fuerza con que se toca la nota. Si fuera así los instrumentos musicales no serian armónicos.

Movimiento armónico simple y movimiento circular



Partícula que se mueve con velocidad constante sobre una circunferencia:



$$\theta = \omega t + \delta$$

ω=v/A es la velocidad angular

desplazamiento angular

Componente x de la posición de la partícula:

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \delta)$$

La proyección sobre un diámetro de una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme es un movimiento armónico simple.

Energía del MAS

Cuando un objeto oscila con MAS, las energías cinética y potencial del sistema varían con el tiempo. Su suma, la energía total $E=E_c+U$, es constante. Consideremos un objeto a una distancia x del equilibrio sobre el que actúa una fuerza de restitución $-kx$. La energía potencial es:

$$\boxed{U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\delta)}$$

ENERGÍA POTENCIAL DEL MAS

$$x=A\cos(\omega t+\delta)$$

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

La energía cinética es:

$$\boxed{E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t+\delta)=\frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t+\delta)}$$

$$v_x=-A\omega sen(\omega t+\delta)$$

ENERGÍA CINÉTICA DEL MAS

Energía mecánica total del MAS

$$E_{tot} = U + E_c = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t + \delta)$$

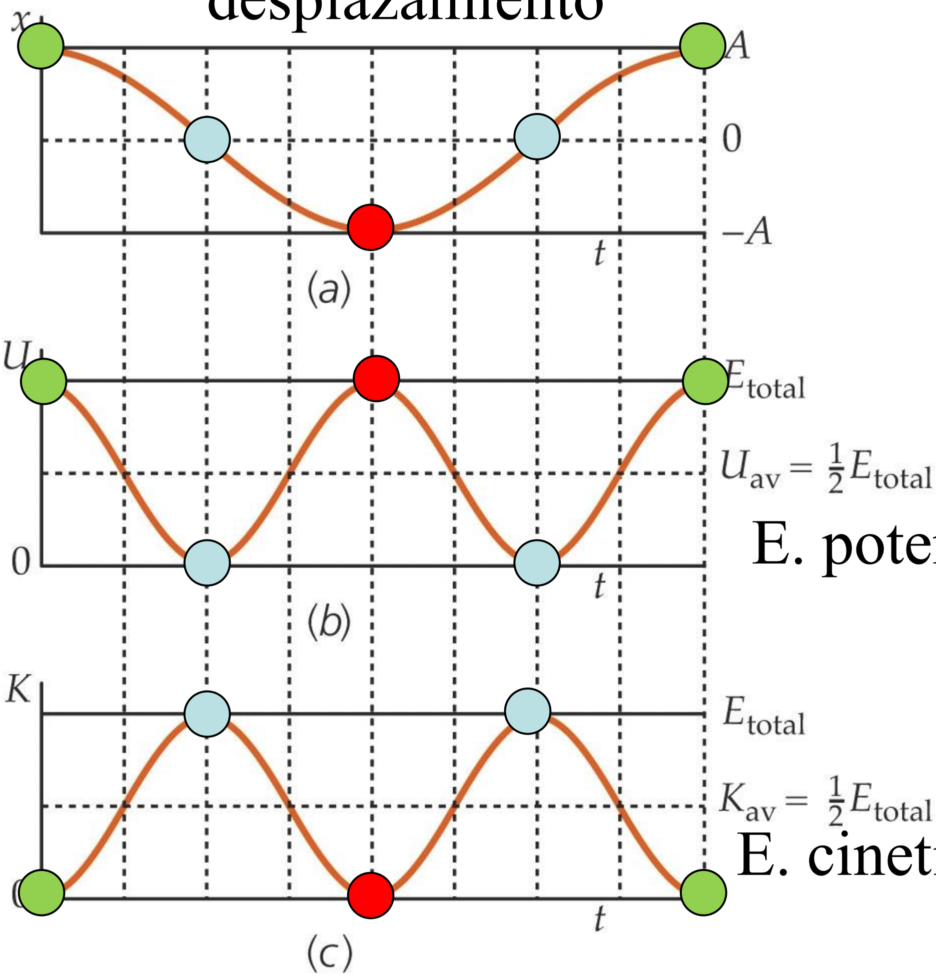
$$E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2\left[\underbrace{\cos^2(\omega t + \delta) + sen^2(\omega t + \delta)}_{1}\right] = \boxed{\frac{1}{2}kA^2}$$

ENERGÍA TOTAL DEL MAS

La energía total del MAS es proporcional al cuadrado de la amplitud (A).

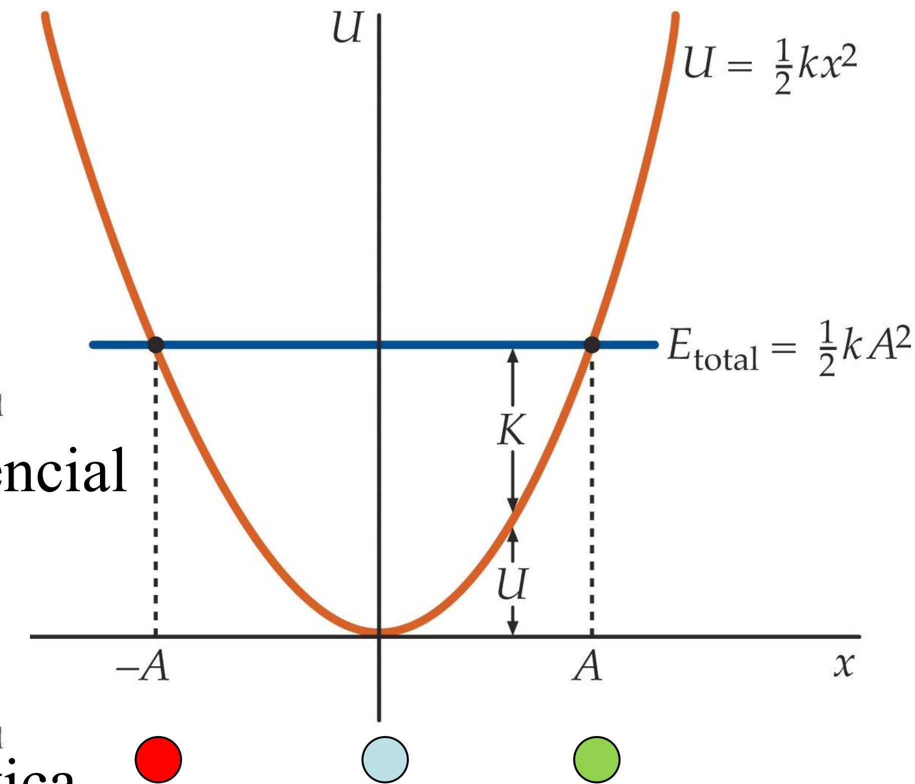
Energía total del MAS

desplazamiento

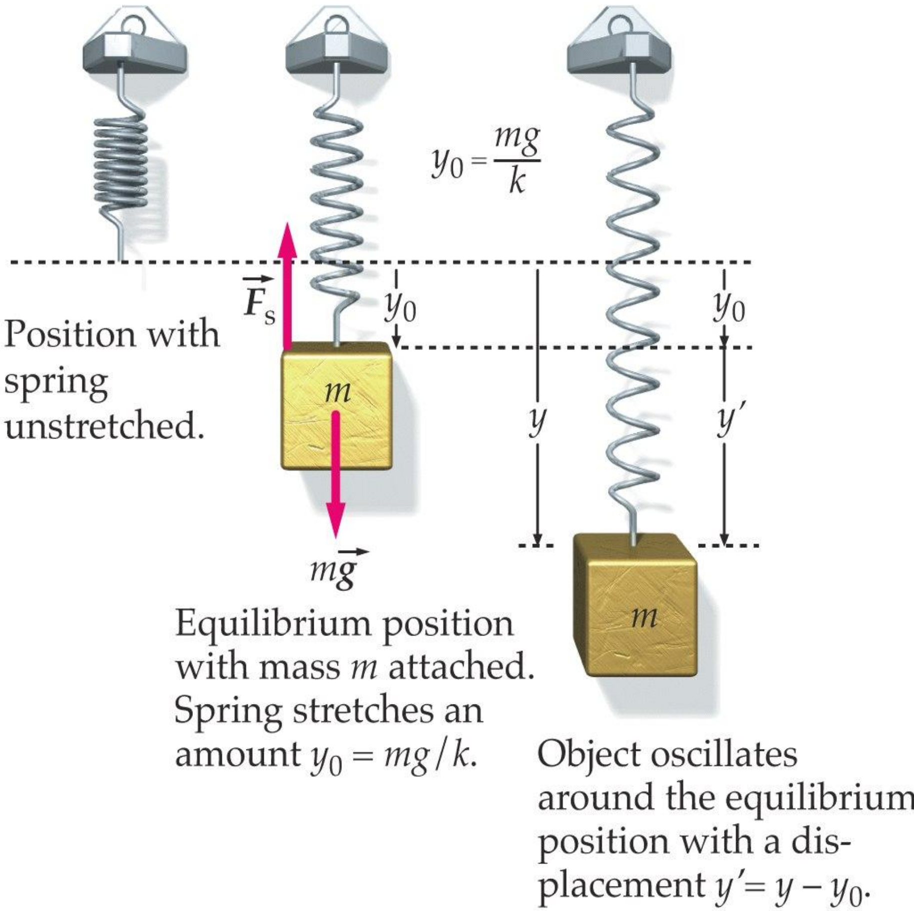


E. potencial

E. cinetica



Objeto colgado de un muelle



$$y = y' + y_o$$

$$\sum F_y = -ky + mg$$

$$\sum F_y = -k\left(y' + y_o\right) + mg = -ky' - \cancel{ky_o} + \cancel{mg}$$

$$ky_o = mg$$

$$\sum F_y = -ky'$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$-ky' = m\frac{d^2 y}{dt^2} \longleftarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2}$$

(y_o= cte.)

$$-ky' = m\frac{d^2 y'}{dt^2}$$

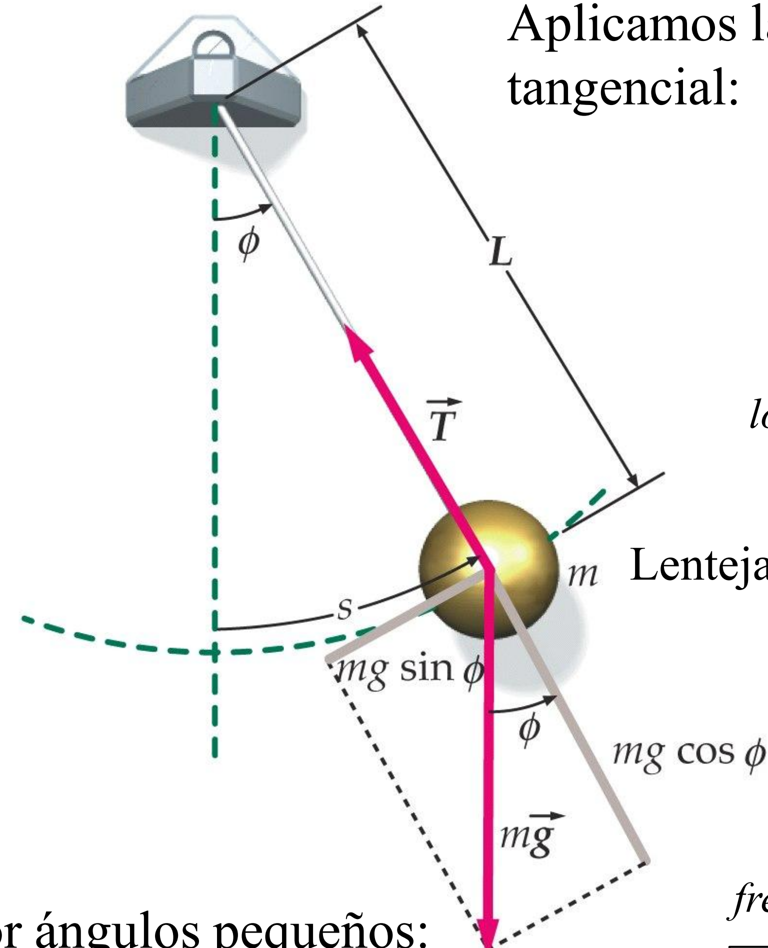
$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y'$$

Solución

$$y' = A\cos\left(\omega t + \delta\right)$$

El efecto de la fuerza gravitatoria *mg* consiste meramente en desplazar la posición de equilibrio desde y=0 hasta y’=0.

El péndulo simple



Lenteja

Aplicamos la 2da ecuación de Newton a la componente tangencial:

$$\sum F_t = ma_t$$

$$-mg\,sen\phi = m\frac{d^2s}{dt}$$

longitud de arco

$$s = L\phi \rightarrow \frac{d^2s}{dt} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}sen\phi}$$

El movimiento de un péndulo no depende de la masa de la lenteja.

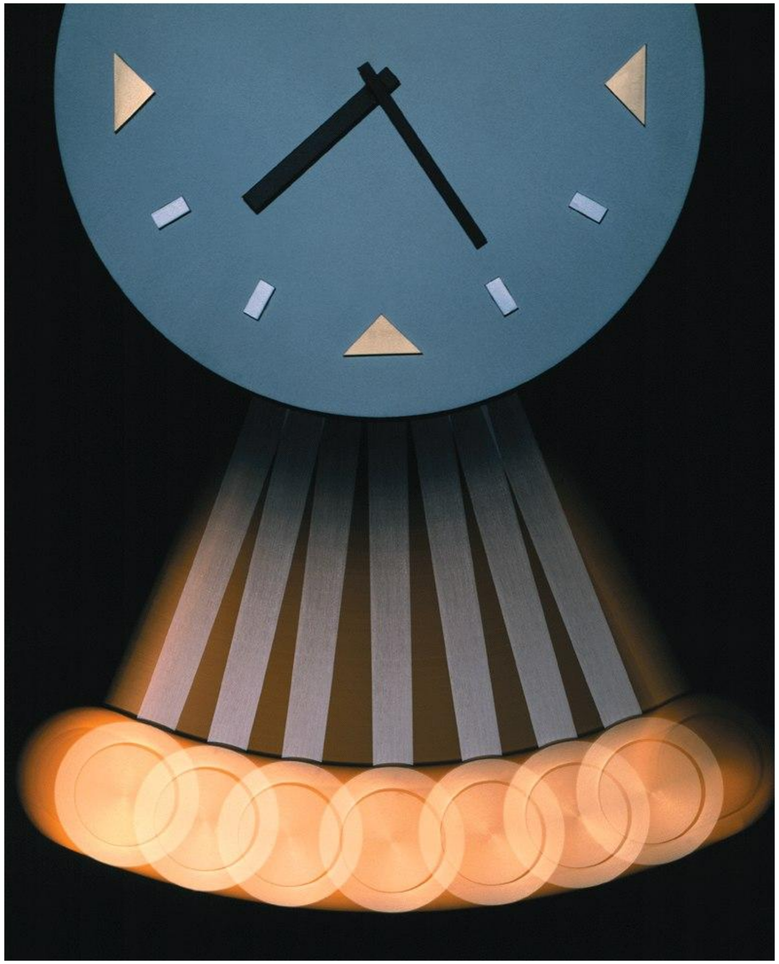
Por ángulos pequeños:

frecuencia angular

$$sen\phi \approx \phi \rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\phi \rightarrow \boxed{\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi}$$

El movimiento de un péndulo <u>es aproximadamente armónico simple</u>.

El péndulo simple



$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi$$

$\downarrow$ Solución

$$\phi = \phi_o \cos(\omega t + \delta)$$

El periodo de un péndulo es:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

PERIODO DE UN PÉNDULO SIMPLE

La aceleración debida a la gravedad *g* puede medirse fácilmente utilizando un péndulo simple. Únicamente es necesario medir la longitud *L* y el periodo *T*.

Oscilaciones amortiguadas

Si un muelle o péndulo oscilan libremente, siempre acaban parándose porque las fuerzas de rozamiento disipan su energía mecánica. El movimiento en un sistema amortiguado es:

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

fuerza de amortiguamiento lineal

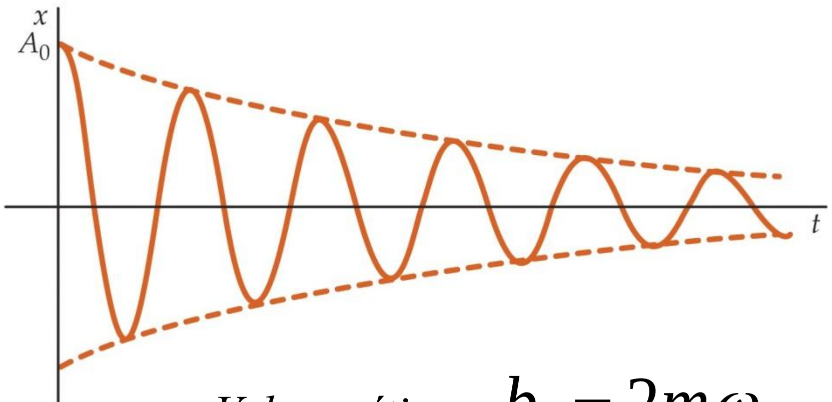
La solución de esta ecuación diferencial:

$$\boxed{x = A_o e^{-(b/2m)t}\cos(\omega' + \delta)}$$

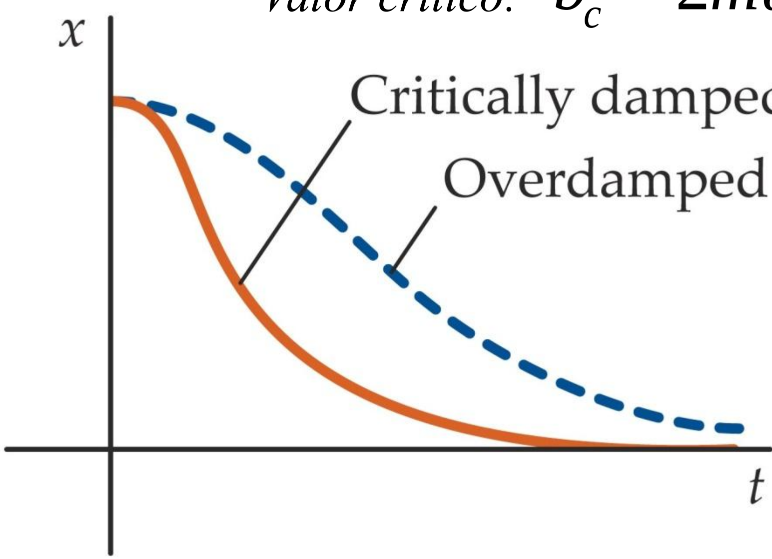
Constante de amortiguamiento

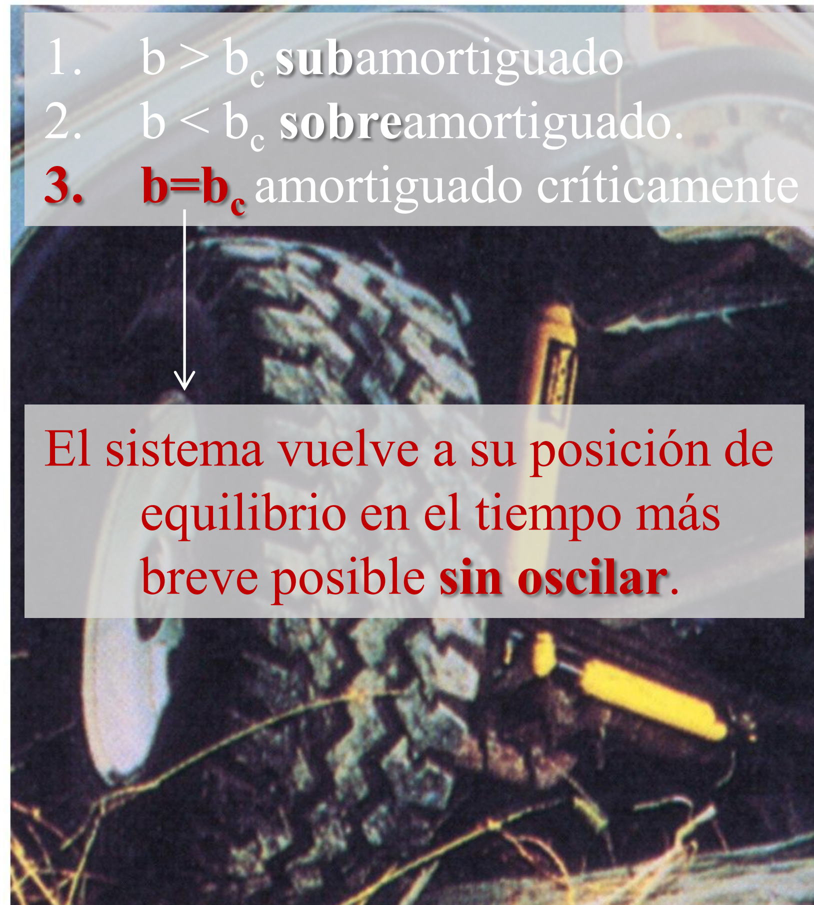
Amplitud máxima

Cuanto menor sea b, más rápidamente volverá el objeto al equilibrio. En muchas aplicaciones prácticas se usa un **amortiguador crítico** o casi crítico para evitar oscilaciones y conseguir que el sistema vuelva al equilibrio rápidamente. Esto es el amortiguamiento mínimo para que se produzca un movimiento no oscilatorio.



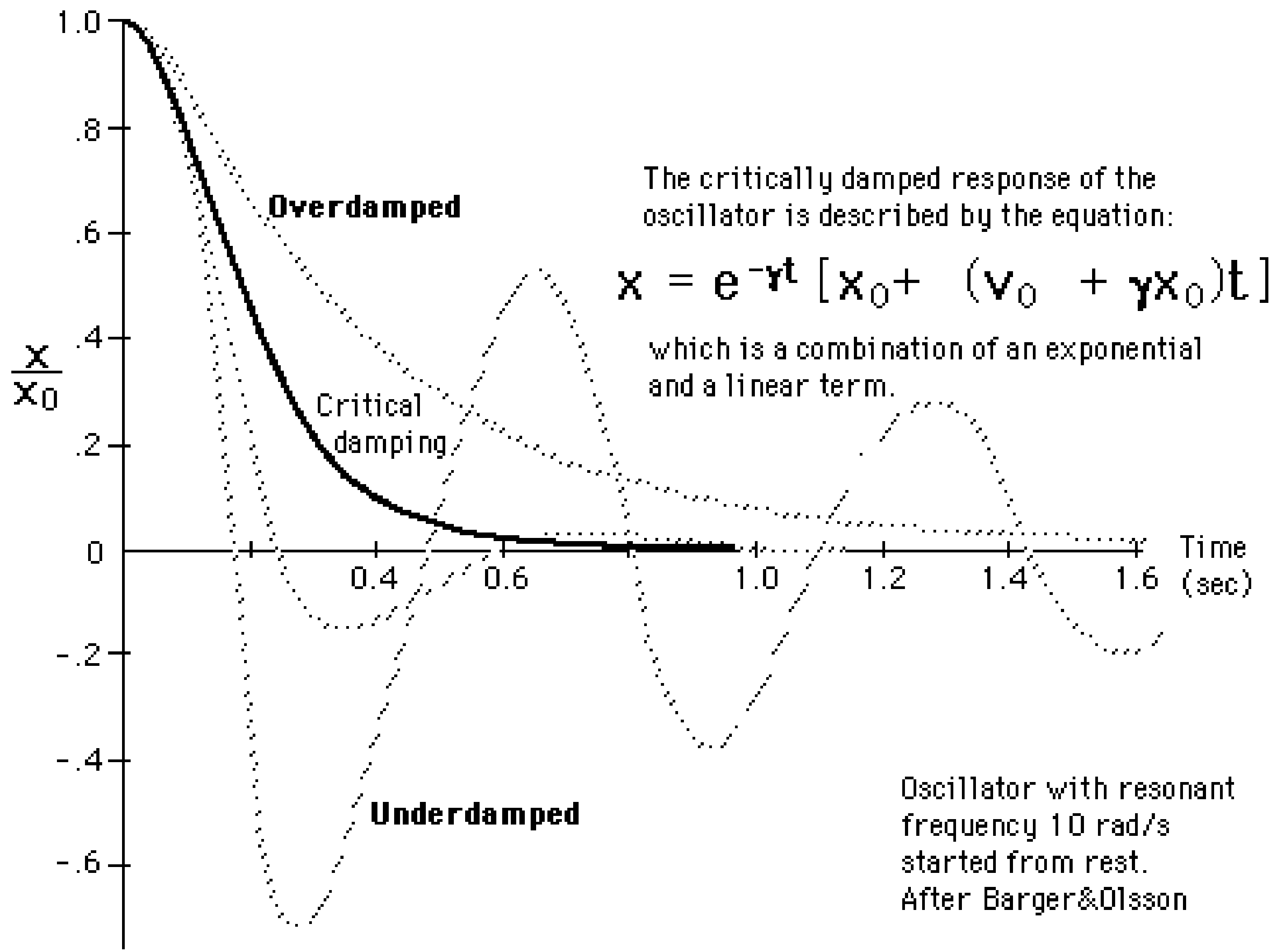
Valor crítico: $b_c = 2m\omega_o$





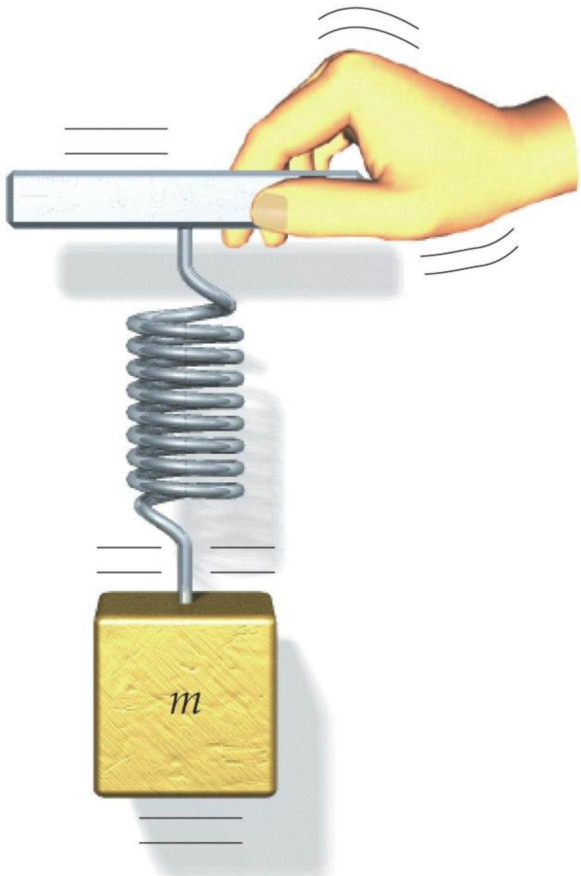
1. $b > b_c$ **sub**amortiguado
2. $b < b_c$ **sobre**amortiguado.
3. **$b=b_c$** amortiguado críticamente

El sistema vuelve a su posición de equilibrio en el tiempo más breve posible **sin oscilar**.



1.0
.8
.6
.4
.2
0
-.2
-.4
-.6
$\frac{x}{x_0}$
0.4
0.6
1.0
1.2
1.4
1.6
Time (sec)
Overdamped
Critical damping
Underdamped
The critically damped response of the oscillator is described by the equation:
$x = e^{-\gamma t}[x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t]$
which is a combination of an exponential and a linear term.
Oscillator with resonant frequency 10 rad/s started from rest.
After Barger&Olsson

Oscilaciones forzadas y resonancia



Se define como **frecuencia natural** de un oscilador, ω_o como la que tendría si no estuviesen presentes ni el amortiguamiento ni el sistema impulsor:

$$\omega_o = \sqrt{k/m}$$

Si la frecuencia impulsora (desplazamiento del suporte gris hacia arriba y hacia abajo) es aproximadamente igual a la frecuencia natural del sistema, éste oscilará con una amplitud relativamente grande. Si el soporte gris oscila con la frecuencia natural del sistema masa-muelle, la masa oscilará con una amplitud mucho mayor que si el soporte oscila con frecuencias mayores o menores. Este fenómeno se llama **resonancia**.

Cuando la frecuencia de la fuerza impulsadora es igual a la frecuencia natural del oscilador, la **energía absorbida por éste en cada ciclo es máxima**. Por ello la frecuencia natural se denomina **frecuencia de resonancia**.

Dándose impulso en el columpio, la persona de la foto transfiere parte de su energía interna a la energía mecánica del oscilador.

Cuando nos sentamos en un columpio aprendemos intuitivamente a mover el cuerpo con la misma frecuencia que la natural del columpio.

PROBLEMA

Un objeto oscila con frecuencia angular ω=8.0 rad/s. En t=0, el objeto se encuentra en x=4 cm con una velocidad inicial v=-25 m/s. (*a*) Determinar la amplitud y la constante de fase para este movimiento. (*b*) Escribir x en función del tiempo.