1 Presentación

Prof. José Luis Guijarro

2 Temario

1. Grupos
   (a) Definición de grupo y propiedades
   (b) Ejemplos: congruencias $\mathbb{Z}_n$, permutaciones S_n, matrices, dihédrico D_{2n}, el producto directo.
   (c) Subgrupos
   (d) Teorema de Lagrange
   (e) Subgrupos normales. Grupo cociente
   (f) Homomorfismos de grupos
   (g) Teoremas de isomorfía
   (h) Teorema de clasificación de los grupos cíclicos
   (i) Teorema de clasificación de los grupos abelianos finitos
   (j) Teorema de clasificación de los grupos abelianos finitamente generados
   (k) Generadores y relaciones
2. Anillos
   (a) Definición de anillo y propiedades
   (b) Subanillos e ideales
   (c) Homomorfismos de anillos
   (d) El anillo de polinomios en una variable con coeficientes en un cuerpo, $K[X]$
   (e) Factorización: dominios de factorización única DFU, dominios de ideales principales DIP, dominios euclideos DE

3 Bibliografía

1. Dorronsoro, Hernández "Números, grupos y anillos" Ed. Addison-Wesley 96
2. Bujalance, Etayo, Gamboa: "Teoría elemental de grupos" UNED ediciones 2002

4 Grupos

1. Justificar cuáles de las siguientes operaciones son asociativas y cuáles son conmutativas

   (a) En $\mathbb{R}$, $a * b = |a|\ b$

   (b) En $\mathbb{Z}$, $a * b = a + b + b^2$

   (c) En $\mathbb{Z}$, $a * b = a + b + ab$

2. Tomar $G = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ y la operación definida por $a * b = 3ab$. Encontrar un elemento identidad en $(G, *)$. Encontrar el inverso de cualquier elemento x de G. ¿Es $(G, *)$ un grupo?

3. Sea G un conjunto con una operación binaria asociativa tal que $\forall a, b \in G$ $\exists! x, y \in G \ / \ ax = b \ \ ya = b$. Demostrar que G es grupo

4. Sea $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ y la operación $a * b = a + b + ab$. ¿Es $(G, *)$ un grupo? Encontrar $x \in G$ tal que $2 * x * 3 = 35$

5. Completar la siguiente tabla de manera que sea la tabla de un grupo. ¿Es este grupo abeliano?

$*$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a		e	f	c	d
b	b	e	a			
c	c				a	
d	d	f				
f	f	c		a		

7. Si G es un grupo en el que $x^2 = e \quad \forall x \in G$ demostrar que es abeliano

8. En un grupo $(G, *)$ se define $a^2 = a{*}a$, $a^3 = a{*}a{*}a$, y en general $a^n = a{*}.\overset{n}{.}.{*}a$. Demostrar:

   (a) $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$

   (b) Si G es abeliano, $(a * b)^n = a^n * b^n$

   (c) $x^n = e \Longleftrightarrow (y^{-1} * x * y)^n = e$

   (d) Si $b^{-1} * a * b = a^k$ entonces $b^{-r} * a^s * b^r = a^{sk^r}$

9. Indicar cuál de los siguientes conjuntos es grupo. En caso afirmativo indicar si es abeliano.

   (a) $\{(1+2m)/(1+2n) \ / \ m, n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$ con la multiplicación usual

   (b) $\{cos \ q + i \ sen \ q \ / \ q \in \mathbb{Q}\}$ con la multiplicación usual

   (c) $\mathbb{Z}$ con la operación $a * b = a + b + 1$

   (d) $\mathbb{Z}$ con la operación $a * b = a - b$

   (e) $\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \ / \ v \in (-1, 1)\}$ respecto de la multiplicación de matrices. (Este es el grupo de Lorentz reducido, empleado en relatividad especial)

   (f) El conjunto Γ formado por las 6 funciones de variable compleja $\varphi_1(z) = z \quad \varphi_2(z) = 1/(1-z) \quad \varphi_3(z) = (z-1)/z \quad \varphi_4(z) = 1/z \quad \varphi_5(z) = 1-z$ $\varphi_6(z) = z/(z-1)$ con la composición de funciones

   (g) $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \eta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \xi & 0 \end{pmatrix}\}$ con la composición de matrices, siendo $\{1, \xi, \eta\}$ las raices cúbicas de la unidad, es decir, las soluciones complejas de $x^3 - 1 = 0$

   (h) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ con la operación $(a, b) * (c, d) = (a + c, 2^c b + d)$

   (i) $\{m/p^n \ / \ m, n \in \mathbb{Z}\}$ con la suma usual, siendo p un número primo

10. Dadas $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ ambas permutaciones de S_6 calcular α^2, α^{21}, β^3, $\alpha^3\beta^6$ y la signatura de cada una de ellas

(b) S_3

(c) $(\mathbb{Z}_8, +)$

(d) D_8

(e) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

(f) Alt_4

12. Demostrar que $T = \{x \in D_{2n} \ / \ x^2 = I\}$ no es un subgrupo de D_{2n}

13. Dados H, K subgrupos de $(G, *)$ demostrar que

    (a) $H \cup K$ es subgrupo si y sólo si $H \subseteq K$ ó $K \subseteq H$

    (b) $HK = \{h * k \ / \ h \in H \ \ k \in K\}$ es subgrupo si y sólo si $HK = KH$

14. Demostrar que las siguientes definiciones son subgrupos de $(G, *)$

    (a) Dado $h \in G$, el centralizador de h en G, $C_h = \{g \in G \ / \ g * h = h * g\}$

    (b) Dado $H \leq G$, el normalizador de H en G, $N_H = \{g \in G \ / \ gHg^{-1} = H\}$

    (c) El centro de G, $Z(G) = \{g \in G \ / \ g * h = h * g \ \ \forall h \in G\}$

15. Demostrar que todo grupo cíclico es abeliano

16. Sea G un grupo abeliano que contiene un elemento a de orden m y un elemento b de orden n / $(m, n) = 1$. Demostrar que el orden de ab es mn. Dar un ejemplo que muestre que la condición $(m, n) = 1$ no se puede quitar

17. Hallar el orden del elemento $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ en función de los órdenes de cada factor. A partir de $(\mathbb{Z}_3, +)$ $(\mathbb{Z}_5, +)$ probar que $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ es cíclico y hallar un generador. ¿Es cierto que si G y H son grupos cíclicos, $G \times H$ es cíclico?

18. Demostrar que si $(G, *)$ es un grupo cíclico con sólo un generador, G tiene como máximo 1 o 2 elementos. ¿Es cierto este resultado si posee 2 generadores?

19. Probar que un grupo de orden 6 abeliano, es cíclico si contiene un elemento de orden 3

20. Sea G grupo de orden par. Demostrar que existe $a \neq e$ / $a^2 = e$

22. Hallar todos los subgrupos de orden 8 de S_4

23. Sea G grupo finito y $H, K \leq G$ con órdenes m, n respectivamente y $(m, n) = 1$. Probar que $H \cap K = \{e\}$

24. Si p, q son primos distintos, probar que cualquier grupo abeliano de orden pq es cíclico

25. Mostrar que A_4 no tiene un subgrupo de orden 6 (El recíproco del teorema de Lagrange es falso)

26. Demostrar que todo subgrupo propio de S_3 es cíclico. ¿Es posible encontrar un grupo abeliano no cíclico en el que todos sus subgrupos propios sean cíclicos?

27. Decir si el enunciado es verdadero o falso:

    (a) Cualquier permutación puede ser escrita como un producto de transposiciones disjuntas

    (b) Si π es un ciclo de longitud n, entonces $\pi^n = e$

    (c) La permutación identidad e, se puede escribir como un producto de transposiciones

    (d) Todo elemento de orden 2 de $S_n \quad n > 3$ es una transposición

    (e) Las permutaciones impares de S_4 forman un subgrupo

    (f) El grupo Alt_3 es abeliano

    (g) Si $n > 2 \quad S_n$ es cíclico

    (h) No es posible expresar un producto de ciclos disjuntos como un producto de ciclos que no son disjuntos

    (i) S_3 es isomorfo al subgrupo de S_4 que deja invariante un mismo elemento

    (j) Si $n > 1$ en S_n hay el mismo número de permutaciones pares que impares

28. Hallar los adjuntos por la izquierda y derecha del subgrupo generado por (123) en S_4

29. Encontrar todos los subgrupos normales de D_8

30. Sea $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ y sea $H = \{(x_1, x_2) \;/\; x_2 = 2x_1\}$

(b) Interpretar geométricamente quienes son las clases de equivalencia G/H y cómo actúa $(G/H, +)$

31. Sea $(\mathbb{C}^*, \bullet)$ grupo multiplicativo de los complejos no nulos. Sea $H = \{z \in \mathbb{C}^* \ / \ |z| = 1\}$

    (a) Demostrar que $H \trianglelefteq \mathbb{C}^*$

    (b) indicar geométricamente quienes son los elementos del grupo cociente $\mathbb{C}^*/H$

32. Sea $H \leq G \ / \ \forall x \in G \ \ x^2 \in H$. Demostrar que $H \trianglelefteq G$ y G/H es abeliano

33. ¿ Son $H = \mathbb{Z} \times \{0\}$ $K = \{0\} \times \mathbb{Q}$ subgrupos normales del problema (9h) ?

34. Sea el grupo abeliano $G = \{a^m b^n \ / \ m, n \in \mathbb{Z}\}$ donde $a^3 = b^3 = e$ y $ab = ba$; y sea H el subgrupo generado por ab^2

    (a) Determinar explícitamente los adjuntos de H en G

    (b) Dar la tabla de G/H

35. Dado el grupo $(G, *)$, se define el conmutador de dos elementos de G como $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$. Sea $\delta(G)$ el subgrupo generado por todos los conmutadores, es decir
$$\delta(G) =< \{[a, b]/a, b \in G\} >$$
    Demostrar que

    (a) $\delta(G) \trianglelefteq G$

    (b) $G/\delta(G)$ es abeliano

    (c) $\delta(G)$ es el subgrupo más pequeño de G que tiene la propiedad anterior

36. Demostrar que $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$ e interpretar las clases de equivalencia de $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$

37. Demostrar que $A_n \trianglelefteq S_n$

38. ¿ Es cierto que $K \trianglelefteq H$ y $H \trianglelefteq G \Longrightarrow K \trianglelefteq G$?

    (a) Tomar H como el subgrupo de S_4 generado por (1 2)(3 4) y (1 3)(24).

    (b) Tomar $H = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R}^*\}$ y $G = H \cup L$ con el producto de

39. Dar un ejemplo de un grupo G que posea un subgrupo normal H tal que H y G/H sean cíclicos pero G no lo sea

40. Siendo H subgrupo de G, demostrar que su normalizador N_H es el mayor subgrupo de G del que H es normal

41. Si H es un subgrupo de G y K es normal en G, demostrar que $HK \leq G$ y $K \trianglelefteq HK$

42. Sea H un subgrupo normal de G y x un elemento de G; demostrar que el orden de xH en G/H es un divisor del orden de x en G

43. Sea $(G, *)$ un grupo, $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$. Demostrar que $HK \trianglelefteq G$

44. Demostrar que

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (GL_2(\mathbb{R}),\bullet) \\ & x & & \begin{pmatrix} cos\ x & -sen\ x \\ sen\ x & cos\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

es un homomorfismo y calcular su núcleo

45. ¿ Es $(\mathbb{R}^*, \bullet)$ isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$? ¿ Es $(\mathbb{R}^+, \bullet)$ isomorfo a $(\mathbb{Q}^+, \bullet)$?¿ Es $(\mathbb{Z}, +)$ isomorfo a $(\mathbb{Q}, +)$?

46. Encontrar todos los homomorfismos del grupo aditivo $\mathbb{Z}$ en el grupo aditivo $\mathbb{Q}$

47. Sean H,K subgrupos normales de G tales que $H \cap K = \{e\}$; demostrar que el subgrupo HK es isomorfo a $H \times K$. Enunciar este resultado cuando G es abeliano

48. Demostrar que $D_{12} \approx \mathbb{Z}_2 \times D_6$

49. Sea f la correspondencia que a cada número real x le asocia aquellos números reales y, tales que se verifica $kx^6 - 2yx^3 + y^2 = 0$ siendo $k \in \mathbb{R}$ fijo

    (a) Hallar k para que f sea aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

    (b) Para dicho valor de k, hállese una ley de composición interna (*) en $\mathbb{R}$ tal que f sea aplicación lineal de ($\mathbb{R}$, +) en ($\mathbb{R}$, *)

    (c) Razonar si G = $\{(a + b\sqrt{2})^3 \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de ($\mathbb{R}$, *)

(a) $(P(U), \Delta)$ siendo $U = \{1, 2, 3\}$, $P(U)$ las partes del conjunto U, es decir el conjunto de todos los subconjuntos de U incluyendo el vacío $\oslash$ y el total U, y Δ es la diferencia simétrica, es decir para cualquier par de subconjuntos de U, A y B,

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

(b) $\mathbb{Z}_8$

(c) D_4

(d) $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\} \leq (\mathbb{Z}_{15}, \bullet)$

(e) $Q = \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$ el grupo cuaternión, donde

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ijk = -1$$

Demostrar que no hay 2 grupos isomorfos

51. Dada la aplicación

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \rightharpoonup & \mathbb{R} \\ & x & & \frac{2x}{x+2} \end{array}$$

obtener una ley de composición interna (*) en $Im\ f$ tal que confiera a $Im\ f$ estructura de grupo isomorfo al grupo multiplicativo $(\mathbb{R}_+^*, \bullet)$ ¿ Quién es el neutro de * ?

52. Si A es un grupo abeliano con n elementos y k es un entero primo con n, demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \longrightarrow & A \\ & a & & a^k \end{array}$$

es un isomorfismo

53. Decir si las siguientes definiciones son endomorfismos del problema (9h) y en caso afirmativo hallar su núcleo e imagen:

(a) $(a, b) \longrightarrow (b, a)$

(b) $(a, b) \longrightarrow (a, a)$

54. Sean $(B(G), o)$, $(Aut(G), o)$, $(I(G), o)$ los grupos de biyecciones, automorfismos y automorfismos internos del grupo G. Demostrar que

$$I(G) \trianglelefteq Aut(G) \leq B(G)$$

55. Sea S el conjunto de matrices 2×2 reales, X, tales que $X + I$ es invertible. Probar que S es grupo bajo la ley de composición interna $X*Y = X+Y+XY$. Si M es el grupo de todas las matrices 2×2 reales e invertibles, $GL_2(\mathbb{R})$, demostrar que S y M son isomorfos.

56. Supongamos que existe un entero n tal que la aplicación $f(x) = x^n$ es un automorfismo del grupo G. Demostrar que $\forall g \in G \quad g^{n-1} \in Z(G)$

57. Demostrar por inducción que $S_n = <(12), (123), \ldots, (123\ldots n)>$

58. $\forall \alpha \in S_3 \quad \exists!(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \ / \ \alpha = (12)^a(123)^b$ es decir hay una biyección $\varphi : S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Dar una operación de grupo en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ para que φ sea isomorfismo de grupos

59. Dado el grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

    (a) Hallar su retículo

    (b) Si $N = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ identificar $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4/N$

    (c) Si f es un epimorfismo de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ en $\mathbb{Z}_4$ ¿ cuáles son los posibles núcleos de f ?

60. Sea A subgrupo normal de G, $A \trianglelefteq G$ y B subgrupo normal de H, $B \trianglelefteq H$. Demostrar que $A \times B \trianglelefteq G \times H$ y que $(G \times H)/(A \times B) \approx (G/A) \times (H/B)$

61. Sea G un grupo conmutativo de orden p^n con p primo

    (a) Demostrar que hay elementos de orden p

    (b) Demostrar que para todo m con $0 \leqq m \leqq n$ existe al menos un subgrupo de orden p^m

62. Sea G un grupo abeliano, $H \leqq G$ y $q : H \to G$ la inclusión canónica. Demostrar que $\exists K \leqq G \ / \ G = H \oplus K \iff \exists p \in Hom(G, H) \ / \ p \circ q = id_H$

63. Sean G_1 y G_2 dos grupos finitos y $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo suprayectivo. Demostrar que si $Ker(f) \subset H \leq G_1$ entonces $[G_1 : H] = [G_2 : f(H)]$

64. Sea f un homomorfismo suprayectivo de G en $\mathbb{Z}$ Demostrar que para todo número entero positivo n, G tiene un subgrupo normal de índice n

65. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G tal que $G/N \approx \mathbb{Z}$ Demostrar que para todo número entero positivo n, G tiene un subgrupo normal de índice n

66. En $(\mathbb{Z}, +)$ demostrar que $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = (n, m)\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [n, m]\mathbb{Z}$, $(n, m)\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}/[n, m]\mathbb{Z}$

67. Demostrar que $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn} \iff (m, n) = 1$

68. En el grupo de permutaciones S_{25} se considera el subgrupo $G =< \alpha >$ generado por la permutación

$$\alpha = (2,\ 21,\ 13,\ 3,\ 5,\ 25,\ 7,\ 10,\ 19)(1,\ 22)$$

Dar el retículo de G

69. En el grupo $D_8 \times D_6 \times S_5$ se considera el subgrupo G generado por el elemento (ρ, σ, α) siendo ρ la rotación de 90^o, σ una simetría del triángulo, y $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dar el retículo de G, escribiendo un generador para cada subgrupo.

70. Decir cuáles de los siguientes grupos puede escribirse como suma directa de subgrupos propios: $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ $(\mathbb{Z}_5, +)$ $(\mathbb{Z}_4, +)$

71. Hallar todos los automorfismos de $\mathbb{Z}_{2p}$ con p primo impar

72. Hallar todos los subgrupos de orden p^2 del grupo $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ siendo p un número primo

73. Demostrar que si el orden de un grupo abeliano no es divisible por un cuadrado, el grupo tiene que ser cíclico

74. Sea G grupo finito

    (a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia: $g\mathcal{R}g' \iff \exists x \in G \ / \ g' = xgx^{-1}$

    (b) Demostrar que el cardinal de la clase de g es el índice de G por el centralizador de g: $\#[g] = [G : C_g]$

(c) Demostrar que

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : C_{g_i}]$$

siendo g_i representantes de la clases conjugadas de G que no pertenecen al centro, y r el número de clases distintas (Ecuación de las clases conjugadas)

(d) Sea $\#G = p^n$ p primo, $n \geqq 1$. Demostrar que el centro de G contiene estrictamente al neutro

(e) Demostrar que si $n = 2$ G es abeliano e isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^2}$ o a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$

(f) Sea $\#G = p^n m$ con p primo y $(p, m) = 1$. Demostrar que existe al menos un subgrupo de orden p^n (Teorema de Sylow)

(g) En el caso anterior, demostrar que hay al menos un elemento de orden p, y por tanto un subgrupo de orden p

75. ¿Cuántos grupos abelianos no isomorfos existen de orden 200? ¿Y de orden 255?

76. Sea $G = D_4/Z(D_4)$ Calcular su orden, probar que es abeliano y clasificarlo.

77. ¿Es $\{(2,1),(3,1)\}$ una base para $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? ¿Lo es $\{(2,1),(4,1)\}$? Encontrar una condición necesaria y suficiente para que dos elementos (a, b), (c, d) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sean base.

78. Determinar la estructura del grupo abeliano G definido por los generadores X y las relaciones $\mathcal{R}$ en los casos siguientes:

(a) $X = \{a, b\}$ $\mathcal{R} = \{2a + 4b = 0;\ 3b = 0\}$

(b) $X = \{a, b, c\}$ $\mathcal{R} = \{3a - 5b = 3b - 5c = 5a - 3c = 0\}$

(c) $X = \{a, b, c, d\}$ $\mathcal{R} = \{2a + 3b = 0;\ 4a = 0;\ 5c + 11d = 0\}$

(d) $X = \{a, b, c, d, e\}$ $\mathcal{R} = \{a - 7b + 14c - 21d = 0, 5a - 7b - 2c + 10d - 15e = 0;\ 3a - 3b - 2c + 6d - 9e = 0;\ a - b + 2d - 3e = 0\}$

(e) $X = \{a, b, c, d, e\}$ $\mathcal{R} = \{a - 7b - 21c + 14d = 0; 5a - 7b - 2c + 10d - 15e = 0;\ 3a - 3b - 2c + 6d - 9e = 0;\ a - b + 2d - 3e = 0\}$

(f) $X = \{x_1, ..., x_5\}$ $\mathcal{R} = \{7x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 13x_5 = 0;\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0;\ 6x_1 = 0;\ 6x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 11x_4 = 0\}$

80. Obtener una presentación mediante generadores y relaciones del grupo dihédrico D_n

5 Anillos

1. Calcular las unidades o elementos invertibles de los siguientes anillos: $C([0,1])$, $M_2(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}_n$

2. Sea $\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ donde ξ es una raíz cúbica de la unidad, distinta de 1. Demostrar que $\mathbb{Z}[\xi]$ es un dominio de integridad y calcular sus unidades.

3. Demostrar que los siguientes conjuntos son anillos y encontrar sus unidades

   (a) $A = \{\frac{n}{2^k} \ / \ n, k \in \mathbb{Z}\}$

   (b) Siendo p primo $E_p = \{\frac{a}{b} \ / \ a, b \in \mathbb{Z} \ , p \nmid b\}$

4. Si A, B son anillos, demostrar que el producto cartesiano AxB es un anillo respecto a las operaciones (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d) y (a,b)(c,d) = (ac,bd) ; y que si ambos tienen unidad, lo mismo ocurre con AxB, y en este caso U(AxB) es isomorfo al producto directo de los grupos U(A) y U(B). ¿Si A y B son ambos dominios de integridad, lo es AxB?

5. Probar que un anillo conmutativo, con elemento unidad y finito es un cuerpo si y sólo si no tiene divisores de cero

6. Demostrar que si S es un subconjunto de un anillo A, $S \subset A$, se tiene que $< S >= \cap\{I \ / \ S \subset I,$ I ideal de A$\}$

7. Sean I,J dos ideales de un anillo conmutativo A; probar que los siguientes conjuntos son ideales de A:

   (a) $I + J$ que por definición es el subanillo generado por $I \cup J$

   (b) $I \cap J$

   (c) IJ que por definición es el subanillo generado por $\{ij \ / \ i \in I, \ j \in J\}$

9. Dados dos anillos con unidad A,B, probar que todos los ideales de AxB son de la forma IxJ con I ideal de A, y J ideal de B. Como corolario demostrar que $A \times B/I \times J = A/I \times B/J$

10. Hallar todos los ideales de $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

11. Demostrar que todo ideal primo de $\mathbb{Z}$ es maximal

12. En $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ demostrar que $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = (n,m)\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [n,m]\mathbb{Z}$, $(n,m)\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}/[n,m]\mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z}n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$

13. Demostrar que $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn} \iff (m,n) = 1$ y deducir el teorema del resto chino.

14. En el anillo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ encontrar:

    (a) Un subanillo que no sea un ideal.

    (b) Un ideal propio que no sea primo.

    (c) Un ideal primo que no sea maximal

    (d) Un ideal maximal

15. Encontrar todos los automorfismos de $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$ estos últimos tales que fijen $\mathbb{R}$

16. Un anillo A se dice que tiene característica p si p es el menor natural tal que pa = a + a +...+ a (p veces) es igual a cero para todo $a \in A$. Si no existe tal p se dice que tiene característica cero.

    (a) Calcular las características de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$

    (b) Si A es un anillo con unidad 1_A probar que la función

    $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ & m & & m1_A \end{array}$$

    es un homomorfismo de anillos , y que la característica de A coincide con el número de elementos de la imagen, si dicho número es finito, o es cero en caso contrario.

    (c) Si A es un dominio de integridad con unidad, probar que su característica es cero o un número primo. ¿Es cierto el recíproco?

(d) Si p es primo y A es un anillo conmutativo con característica p, demostrar que la función

$$\begin{array}{cccc} g: & A & \longrightarrow & A \\ & x & & x^p \end{array}$$

es un homomorfismo de anillos. Usar este resultado para demostrar el pequeño teorema de Fermat

17. Sea $\mathbb{Q}^* = \{\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ / \ q_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad y \ \{q_n\} \ es \ de \ Cauchy\}$. Si se define $\{q_n\} + \{q'_n\} = \{q_n + q'_n\}$ y $\{q_n\}\{q'_n\} = \{q_n q'_n\}$ probar que $(\mathbb{Q}^*, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad. Sea $N^* = \{\{q_n\} \in \mathbb{Q}^* \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0\}$. Probar que N* es un ideal maximal e identificar $\mathbb{Q}^*/N^*$

18. Sea A un anillo conmutativo y con unidad $1 \in A$. Un elemento $x \in A$ se llama nilpotente si hay algún número $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $x^m = 0$

(a) Demostrar que si $n = a^k b$ siendo $a, b \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $\overline{ab}$ es un elemento nilpotente del anillo $(\mathbb{Z}_n \ + \ \cdot)$

(b) Si $a \in \mathbb{Z}$, demostrar que el elemento $\overline{a} \in (\mathbb{Z}_n \ + \ \cdot)$ es nilpotente si y sólo si cada divisor primo de n divide a a. Con este resultado, calcular todos los elementos nilpotentes de $\mathbb{Z}_{72}$

(c) Demostrar que si $x \in A$ es nilpotente, entonces o bien $x = 0$ o bien x es un divisor de cero

(d) Demostrar que $1 + x \in U(A)$. Deducir entonces que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es una unidad

(e) Demostrar que el conjunto de los elementos nilpotentes $\eta(A)$ es un ideal de A

(f) Demostrar que si I es un ideal primo de A, entonces $\eta(A) \subseteq I$. Deducir que si $A/\eta(A)$ es un cuerpo entonces A sólo tiene un único ideal primo ¿Cuál?

19. Hallar el cociente y el resto que se obtienen al dividir el polinomio $P(x) = x^5 - x^3 + 3x - 5$ entre el polinomio $Q(x) = x^2 + 7$, primero en $\mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{Z}_5[X]$

20. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de $x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$ y x^3+3x^2+2x+1 como elementos de $\mathbb{Q}[X]$

21. Calcular el máximo común divisor en $\mathbb{Q}[X]$ de los polinomios ...

22. Calcular el m.c.d de $x^3 - x^2 - 4x + 4$ y $x^3 + 4x^2 + x + 4$ en $\mathbb{Z}_5[x]$

23. Hallar todos los $\mathbb{Z}_p$ en los que $x^2 + \overline{2}$ divide a $x^5 - \overline{10}x + \overline{12}$

24. Decir razonadamente cuáles de los siguientes ideales son primos o maximales en $\mathbb{Q}[X]$

    (a) $< x^2 >$
    (b) $< x^2 + 1 >$
    (c) $< x + 5 >$

25. Hallar las raices racionales de:

    (a) $3x^3 - 7x - 5$
    (b) $2x^3 - 3x + 1$

26. Probar que $30x^n - 91 = 0$ no tiene raices racionales para ningún n>1

27. Estudiar la irreducibilidad de $x^2 + \overline{1}$ y $x^3 + x + \overline{2}$ en $\mathbb{Z}_3[X]$ y en $\mathbb{Z}_5[X]$

28. Probar que los siguientes elementos son irreducibles

    (a) $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$
    (b) $x^3 - 9 \in \mathbb{Z}_{31}[X]$
    (c) $x^2 + x + 4 \in \mathbb{Z}_{11}[X]$

29. Descomponer los siguientes polinomios

    (a) $x^4 - 5x^2 + 6$ sobre $\mathbb{Q}[X]$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][X]$ y sobre $\mathbb{R}[X]$
    (b) $x^6 - 1$ sobre $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$ y $\mathbb{Z}_7[X]$
    (c) $x^8 - 1$ sobre $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$ y $\mathbb{Z}_5[X]$
    (d) $x^3 - 3x^2 - 3x + 3$ sobre $\mathbb{Z}_7[x]$

30. Estudiar la irreducibilidad en $\mathbb{Q}[X]$ de:

    (a) $x^3 + 2x^2 + 4x + 2$
    (b) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

(e) $2x^4 - 8x^2 + 1$

(f) $x^4 - 2x^2 + 8x + 1$

(g) $x^4 + 2x^2 - x + 2$

(h) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$

(i) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8$

(j) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

31. Sea $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ y $R(X) = P(X+1)$. Probar que P es irreducible si y sólo si R lo es. Demostrar que el p-ésimo polinomio ciclotómico $\phi_p(x) = x^{p-1} + ... + x + 1$ con p primo, es irreducible.

32. Demostrar que el anillo $A = \{\frac{m}{n} \ / \ m, n \in \mathbb{Z} \ , n \ \ impar\}$ es un dominio de ideales principales ¿Cuáles son sus elementos irreducibles?

33. Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo suprayectivo; probar que si A es un dominio de ideales principales, también lo es B

34. Si C, K son dos cuerpos, probar que todo ideal del producto $C \times K$ es principal

35. Interpretar y demostrar las propiedades del problema (12) en el anillo $\mathbb{K}[t]$