Un determinado proceso industrial se modeliza según un proceso de Markov en tiempo continuo con cuatro estados, 1, 2, 3 y 4, definido según la siguiente matriz de tasa de transiciones instantáneas

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Las tasas vienen expresadas en sucesos por minuto.

a) *Determinar el tiempo medio de permanencia en cada uno de los estados y la matriz de probabilidades de transición.*

b) *¿Se puede considerar este modelo como un proceso de Nacimiento y Muerte? Justificar la respuesta.*

c) *Si por cada hora que el sistema se encuentra en el estado 4 se tiene una penalización de 36 euros, determinar la penalización diaria esperada, supuesto un periodo de operación diario de 8 horas.*

v_i : tasa de permanencia en el estado i,

q_{ij} : tasa de transición instantánea, y

p_{ij} : probabilidad de ir del estado i al estado j,

sabemos que

$$q_{ij} = v_i p_{ij}.$$

Como $\sum_j p_{ij} = 1$ al ser una distribución de probabilidad, tenemos que

$$v_i = v_i \sum_j p_{ij} = \sum_j v_i p_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

y despejando p_{ij} de (7.3), obtenemos

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

donde la segunda igualdad se ha obtenido aplicando el resultado de (6.2).

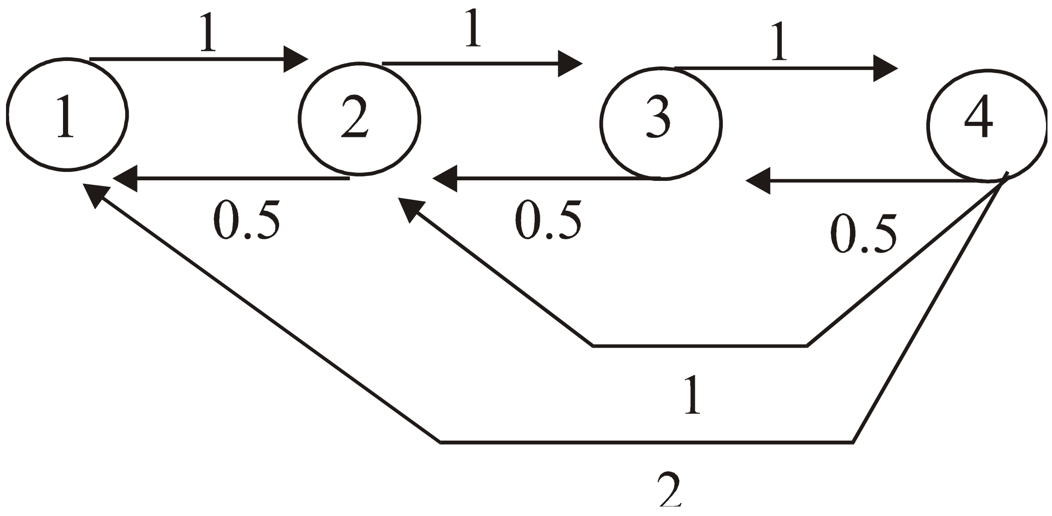
a) El tiempo medio de permanencia en el estado i, $i = 1, \ldots, 4$, es la inversa de la tasa de permanencia en el estado i, ya que el tiempo de permanencia en el estado i sigue una distribución exponencial de tasa v_i. Por lo tanto, los tiempos medios de permanencia en los estados 1, 2, 3 y 4 son $1/v_1$, $1/v_2$, $1/v_3$ y $1/v_4$, respectivamente. Es decir,

El tiempo de permanencia en el estado 1 es $1/v_1 = 1/1 = 1$ minuto.
El tiempo de permanencia en el estado 2 es $1/v_2 = 1/1.5 = 0.\hat{6}$ minutos.
El tiempo de permanencia en el estado 3 es $1/v_3 = 1/1.5 = 0.\hat{6}$ minutos.
El tiempo de permanencia en el estado 4 es $1/v_4 = 1/3.5 = 0.286$ minutos.

La matriz de probabilidades de transición es

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/1 & 0 & 0 \\ 0.5/1.5 & 0 & 1/1.5 & 0 \\ 0 & 0.5/1.5 & 0 & 1/1.5 \\ 2/3.5 & 1/3.5 & 0.5/3.5 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 4/7 & 2/7 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) El diagrama de transición es



No se puede considerar este modelo como un *proceso de nacimiento y muerte* ya que en un proceso de este tipo sólo se pueden producir transiciones al estado inmediatamente anterior o posterior, mientras que en el caso que nos ocupa, desde el estado 4 se producen transiciones al resto de estados.

c) El porcentaje de permanencia en el estado 4, viene determinado por π_4. Así, la penalización media será $8 \times 36\pi_4 = 8 \times 36 \times 0.0734 = 21.139$ euros.

Un ascensor presta servicio a un edificio de tres plantas (planta baja, primera y segunda). Los usuarios llegan a cada una de las plantas siguiendo distribuciones exponenciales con las medias que se presentan en la siguiente tabla

Planta	Media
Baja	5 minutos
1^a	7 minutos
2^a	9 minutos

La siguiente matriz muestra la probabilidad con que un usuario que coge el ascensor en una planta, se traslada a otra.

$$\begin{array}{c} \mathrm{B} \\ 1^a \\ 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuando un usuario llega al ascensor, si éste no está en su planta debe llamarlo antes de utilizarlo. El tiempo que tarda el ascensor en hacer el recorrido (independientemente de si va cargado o vacío o el número de plantas recorridas) es exponencial de media 10 *segundos.*

a) *Modelizar el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo.*

b) *Plantear sus ecuaciones de equilibrio.*

c) *Indicar el porcentaje de tiempo que el ascensor está parado (no calcular).*

a) Para modelizar el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo consideremos los siguientes estados:

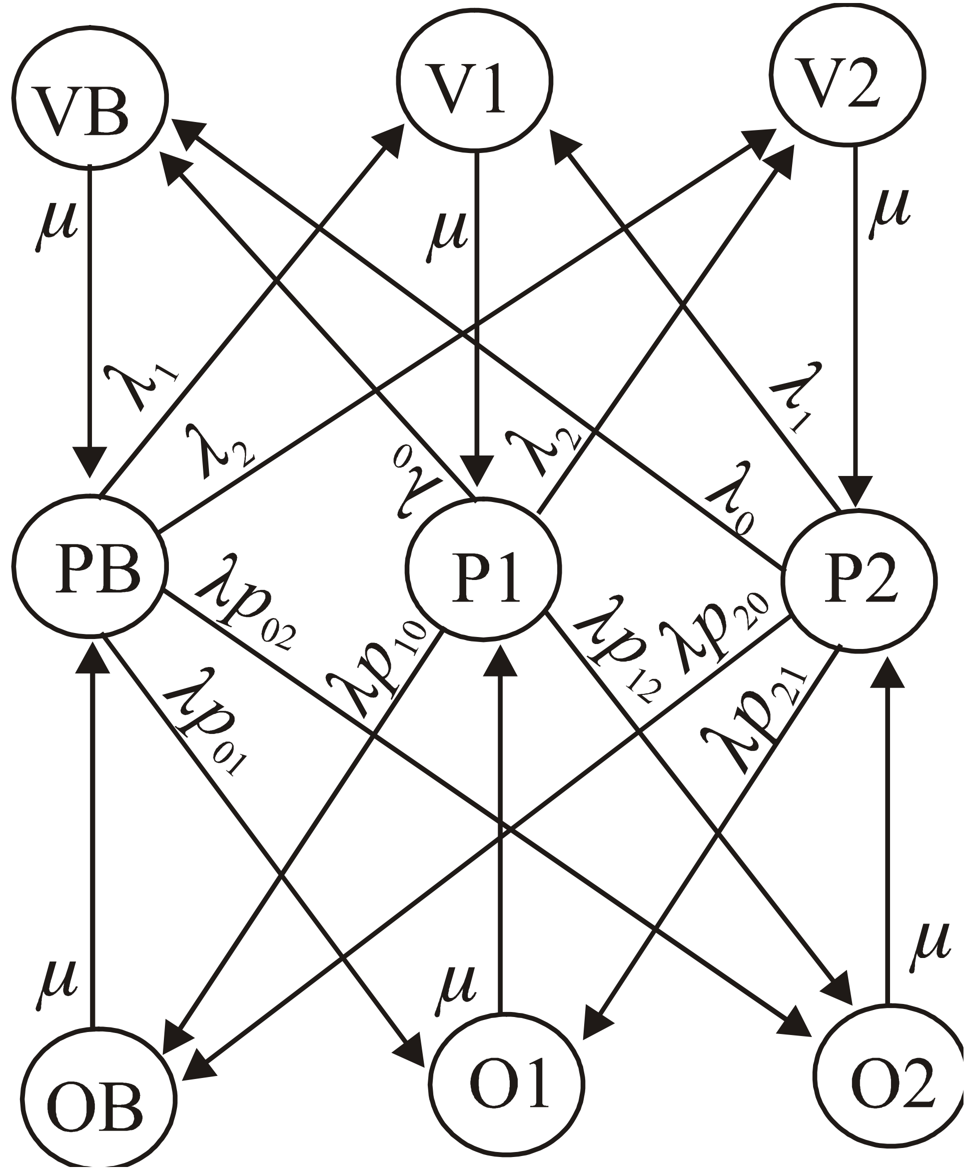
$$\begin{aligned}
&\text{PB : el ascensor está parado en la planta B,}\\
&\text{P1 : el ascensor está parado en la planta 1,}\\
&\text{P2 : el ascensor está parado en la planta 2,}\\
&\text{OB : el ascensor va ocupado a la planta B,}\\
&\text{O1 : el ascensor va ocupado a la planta 1,}\\
&\text{O2 : el ascensor va ocupado a la planta 2,}\\
&\text{VB : el ascensor va vacío a la planta B,}\\
&\text{V1 : el ascensor va vacío a la planta 1,}\\
&\text{V2 : el ascensor va vacío a la planta 2.}
\end{aligned}$$

Las tasas de llegada de los usuarios a cada planta siguen exponenciales de parámetro: $\lambda_0 = \dfrac{1}{5 \times 60} = \dfrac{1}{300}$ usuarios/seg (para la planta baja), $\lambda_1 = \dfrac{1}{7 \times 60} = \dfrac{1}{420}$ usuarios/seg. (para la planta 1^a) y $\lambda_2 = \dfrac{1}{9 \times 60} = \dfrac{1}{540}$ usuarios/seg. (para la planta 2^a).

El tiempo que tarda el ascensor en hacer un trayecto sigue una exponencial de parámetro:

$$\mu = \frac{1}{10}.$$

Así, las transiciones entre estados seguirán las siguientes tasas: $\lambda_i p_{ij}$ (si la transición es entre el estado Pi y el Oj) y λ_j (si la transición es entre el estado Pi y el Vj).



$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Las ecuaciones de equilibrio son

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{10}\pi_{VB} = \frac{1}{300}\pi_{P1} + \frac{1}{300}\pi_{P2}\\
&\frac{1}{10}\pi_{V1} = \frac{1}{420}\pi_{PB} + \frac{1}{420}\pi_{P2}\\
&\frac{1}{10}\pi_{V2} = \frac{1}{540}\pi_{PB} + \frac{1}{540}\pi_{P1}\\
&\left(\frac{1}{420} + \frac{1}{540} + \frac{0.6}{300} + \frac{0.4}{300}\right)\pi_{PB} = \frac{1}{10}\pi_{VB} + \frac{1}{10}\pi_{OB}\\
&\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{540} + \frac{0.8}{420} + \frac{0.2}{420}\right)\pi_{P1} = \frac{1}{10}\pi_{V1} + \frac{1}{10}\pi_{O1}\\
&\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{420} + \frac{0.3}{540} + \frac{0.7}{540}\right)\pi_{P2} = \frac{1}{10}\pi_{V2} + \frac{1}{10}\pi_{O2}\\
&\frac{1}{10}\pi_{OB} = \frac{0.8}{420}\pi_{P1} + \frac{0.3}{540}\pi_{P2}\\
&\frac{1}{10}\pi_{O1} = \frac{0.6}{300}\pi_{PB} + \frac{0.7}{540}\pi_{P2}\\
&\frac{1}{10}\pi_{O2} = \frac{0.4}{300}\pi_{PB} + \frac{0.2}{300}\pi_{P1}\\
&\pi_{VB} + \pi_{V1} + \pi_{V2} + \pi_{PB} + \pi_{P1} + \pi_{P2} + \pi_{OB} + \pi_{O1} + \pi_{O2} = 1
\end{aligned}
$$

c) El porcentaje de tiempo que el ascensor está parado es $\pi_{PB} + \pi_{P1} + \pi_{P2}$.