



la autonomia de un coche
i de combustible sigue una
xponencial de media 120 km.

urgo viaje nos fijamos que está
testigo de la reserva, pero no
ntos km hemos recorrido desde

orrer 30 km para repostar.

hacerlo sin que se pare el coche
ombustible?

la de memoria $P(X \geq t+s | X \geq s) = P(X \geq t)$

empo medio de fallo 120 km, Tiempo de fallo $\sim \exp(\lambda=1/120)$

$$= 1- P(X \leq 30) = 1- F(30)= 1-(1-e^{-30/120}) = e^{-30/120} = 0.7788$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



...s, A y B , necesitan un trasplante de riñón.
...n nuevo riñón,
...nés de un tiempo exponencial con tasa μ_A
...e un tiempo exponencial de tasa μ_B .

...egan según un Proceso de Poisson de tasa λ .

...o que el primer riñón será para A
...está vivo y A ya no lo está y
...ara B si todavía vive.

...probabilidad de que A obtenga un nuevo riñón?

$$T_A \sim \exp(\mu_A), T_R \sim \exp(\lambda)$$

... A sobrevive durante la espera: $T_A \geq T_R$

$$P(T_A \geq T_R) = \lambda / (\mu_A + \lambda)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

probabilidad de que B obtenga un nuevo riñón?

ve durante la espera: recibe el riñón que llega primero o recibe el riñón que llega segundo

exp(λ)

el riñón que llega primero: $T_{R1} < T_B$ y $T_A < \min(T_{R1}, T_B)$

el riñón que llega segundo: $T_{R2} < T_B$ y $T_{R1} < \min(T_A, T_B)$

ve durante la espera: $P(B_1) + P(B_2)$

$P(T_B \text{ y } T_A < \min(T_{R1}, T_B)) = P(T_{R1} < T_B) * P(T_A < \min(T_{R1}, T_B)) = \dots * \mu_A / (\lambda + \mu_A + \mu_B)$

$P(T_B \text{ y } T_{R1} < \min(T_A, T_B)) = P(T_{R2} < T_B) * P(T_{R1} < \min(T_A, T_B)) = \dots * \lambda / (\lambda + \mu_A + \mu_B)$

evive durante la espera) = $\lambda / (\lambda + \mu_B) * (\lambda + \mu_A) / (\lambda + \mu_A + \mu_B)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



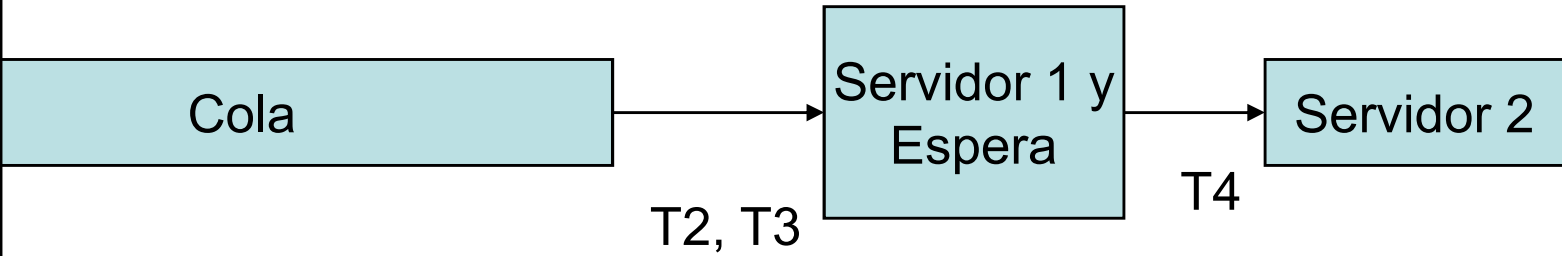
...ma un cliente debe de ser servido primero por el servidor 1 y después por el servidor 2.

...servicio en el procesador i es una exponencial con tasa μ_i , $i=1,2$.
...que encuentra el servidor ocupado espera en cola a ser servido.
...cliente termina con el servidor 1, pasa al servidor 2 si éste está libre.
...2 está ocupado el cliente se queda en el servidor 1 impidiendo que otro cliente hasta que el servidor esté libre.

...salen del sistema después de ser atendidos por el servidor 2.

...hay un cliente en el sistema al que está atendiendo el servidor 1
...¿cuál es el tiempo total esperado que pasarías en el sistema?,

...total esperado en el sistema: $T = T1+T2+T3+T4$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
...
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



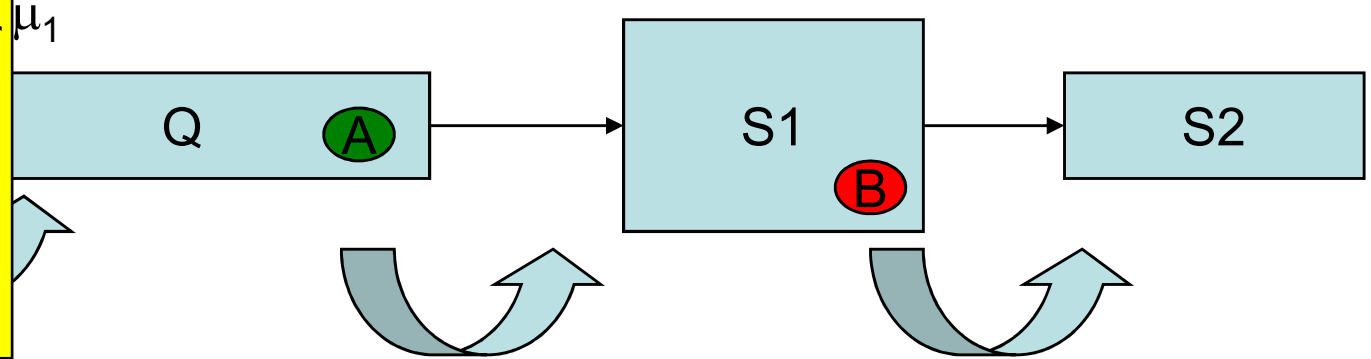
$$+T2+T3+T4] = E[T1]+E[T2]+E[T3]+E[T4]$$

os tiempos medios, con un cliente siendo servido en el Servidor 1

llegar el individuo *A* el servidor está ocupado
ar, en la cola, a que el servidor se desaloje.

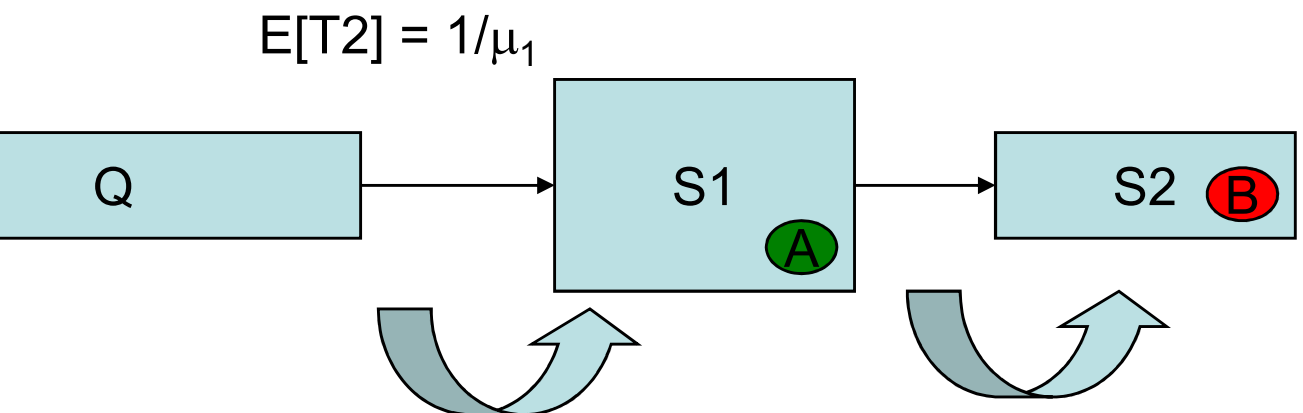
es suficiente que *B* termine de ser tratado en 1, ya que,
el servidor 2, *B* puede pasar sin ninguna demora al
ceso liberando el servidor.

e, al tratarse de un tiempo de servicio exponencial,
de duración del servicio es independiente del
evara *B* siendo atendido cuando *A* llegó al sistema.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

que tarda en ser servido en el servidor 1 sigue ón exponencial, por lo que



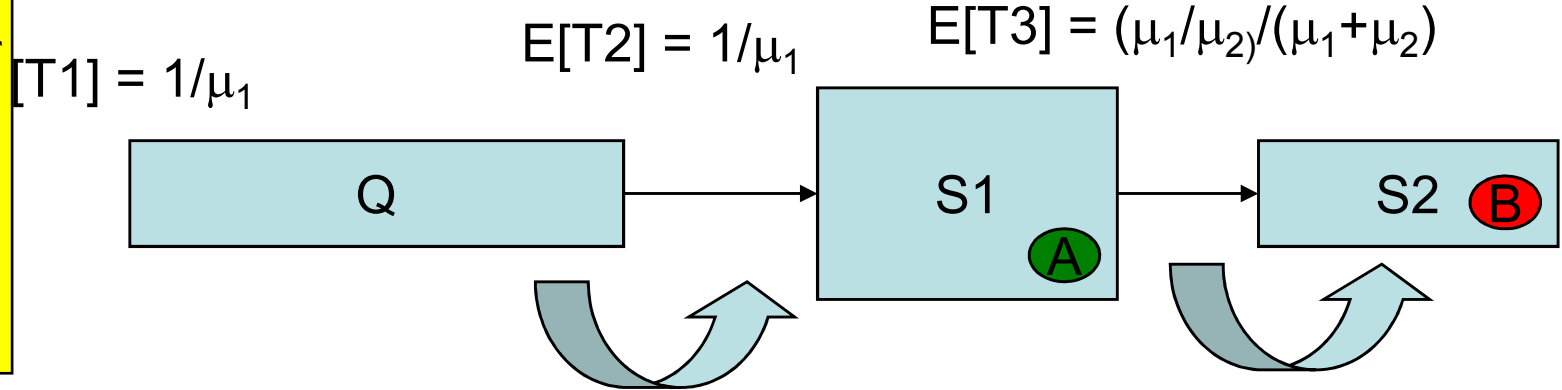
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
...
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



abandonó el servidor 1, vido en el servidor 2.
 e plantean dos posibilidades.
 ardado menos en ser servido que A , esto quiere decir que ha dejado r libre y por tanto A no tendrá que esperar a que se libere.
 ra, si B tarda más que A , éste tendrá que esperar.
 de pérdida de memoria de la distribución exponencial nos indica esperado hasta que acabe el servicio, será el mismo que si acabara $(1/\mu_2)$.

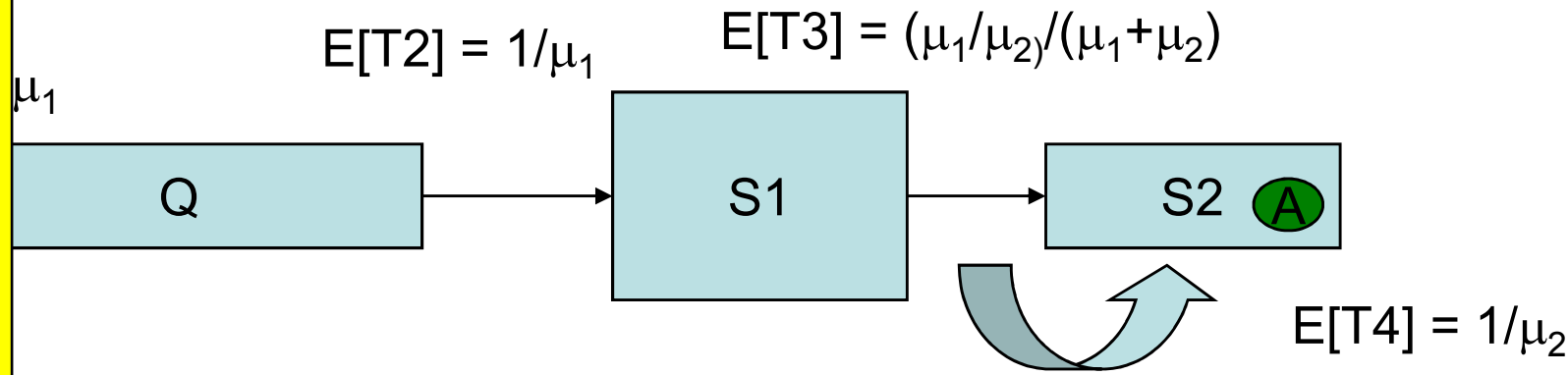
la probabilidad de que B termine antes viene dada ón $(\mu_1/(\mu_1+\mu_2))$ con lo que resulta

$$E[T] = 0 * \mu_1/(\mu_1+\mu_2) + 1/\mu_2 * (1-\mu_1/(\mu_1+\mu_2))$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ite, el tiempo que tarda en ser servido
r 2 sigue una distribución exponencial,



esperado que A pasará en el sistema es

$$E[T] = 2/\mu_1 + (\mu_1/\mu_2)/(\mu_1 + \mu_2) + 1/\mu_2$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



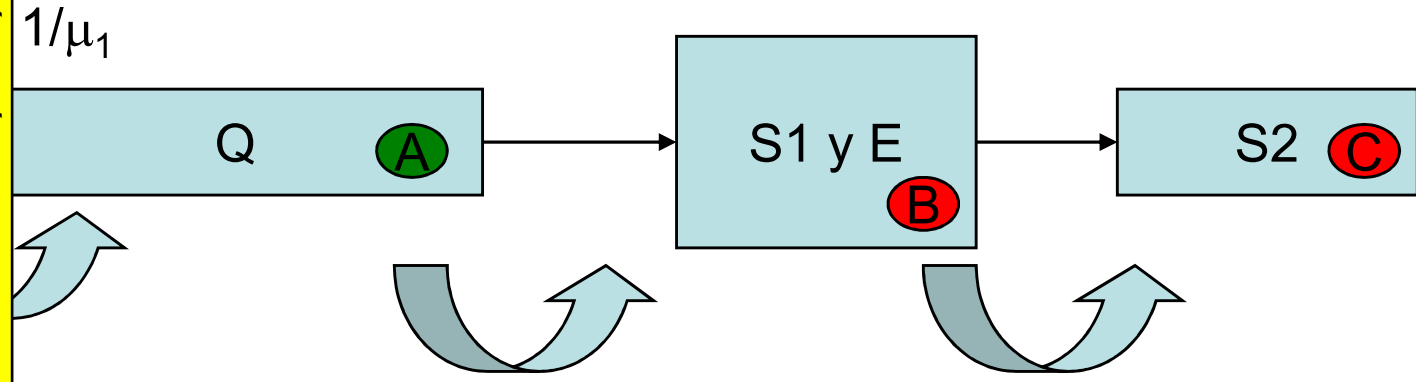
¿Están los dos servidores ocupados?

Los tiempos medios, con un cliente siendo servido en cada Servidor

... con el caso anterior radica en el tiempo que *A* tendrá que esperar que *B* deje libre el Servidor 1 (T_1).

El tiempo intermedios es idéntico al caso anterior. Hay dos posibilidades (que debemos promediar):

... sido servido y está esperando a que acabe *C* en el Servidor 2. ... siendo servido en el momento de la llegada de *A*.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



caso,

- B ya ha sido servido y está esperando a que acabe C en el Servidor

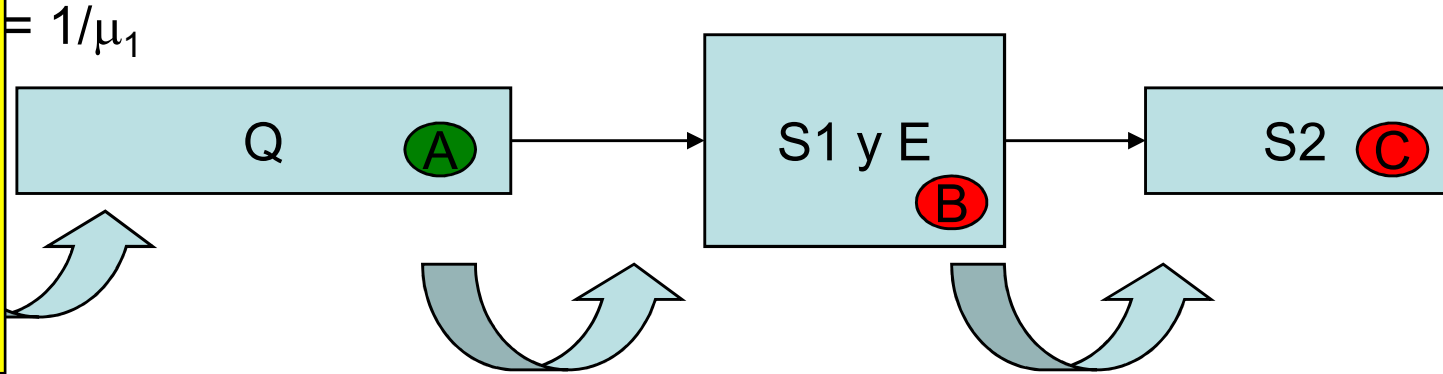
lio que se tardará en desalojar el servidor

el tiempo medio de servicio del segundo servidor ($1/\mu_2$).

o caso,

está siendo servido en el momento de la llegada de A .

er en cuenta el tiempo que tardará B en ser servido (T_2) y potencialmente pasará esperando a que termine C (T_3).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Para la probabilidad de estos casos tendremos en cuenta que tal como se esperaba que B permanezca en el Servidor 1, ya que ya se ha calculado anteriormente es

$$E[T2] + E[T3] = 1/\mu_1 + (\mu_1/\mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$$

La probabilidad de que un individuo que se encuentra en el Servidor 1 esté siendo atendido por el Servidor 2 cuando esto que el Servidor 2 está ocupado será

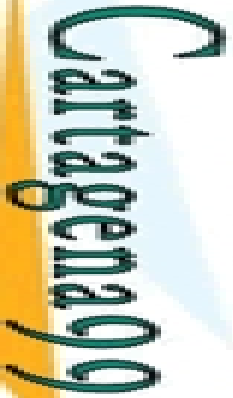
$$E[T2] / (E[T2] + E[T3]) = (1/\mu_1) / (1/\mu_1 + (\mu_1/\mu_2)/(\mu_1 + \mu_2))$$

La probabilidad de estar esperando

$$E[T3] / (E[T2] + E[T3]) = ((\mu_1/\mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)) / (1/\mu_1 + (\mu_1/\mu_2)/(\mu_1 + \mu_2))$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



B sirviéndose en S1 | C en S2)

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{\frac{1}{\mu_1}}{1 + \frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2}} \right) + \frac{\frac{1}{\mu_1}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2}} + \frac{\frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2}}{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2} \right)} + \frac{\frac{1}{\mu_2}}{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2} \right)} = \\
 & + \frac{\frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2^2}}{\frac{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2 + \mu_1^2}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2\mu_1}} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2(\mu_1^2 + \mu_2(\mu_1 + \mu_2))}.
 \end{aligned}$$

P(B esperando en S1 | C en S2)

si los tiempos son iguales:

$$[T] = \frac{2}{\mu_1} - \frac{\mu_1^2}{\mu_2(\mu_1^2 + \mu_2(\mu_1 + \mu_2))} + \frac{\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2} + \frac{1}{\mu_2}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Procesos de Poisson independientes de llegadas a la hora respectivamente, las llegadas de dos tipos de trabajos en un sistema.

Probabilidad de que un trabajo de tipo 1 llegue antes que un trabajo

Probabilidad de que lleguen en una hora 4 trabajos.

que han llegado 4 trabajos.

Probabilidad de que los sean de tipo?

$$T_1 \sim Exp(\lambda_1),$$

$$T_2 \sim Exp(\lambda_2).$$

$$P(T_X < T_Y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



proceso obtenido como suma de X e Y.

W se distribuye como un Proceso de Poisson de tasa $\lambda_1 + \lambda_2$

$$P(W(t+1) - W(t) = 4) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^4}{4!}$$

Probabilidad de que un suceso cualquiera sea del tipo 1 es

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Para cada suceso esta probabilidad es independiente del resto de sucesos.

Probabilidad de que los 4 sean de tipo 1 será

$$(p_1)^4 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^4$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



demandas que cierta compañía de seguros debe a sus pólizas sigue un Proceso de Poisson de tasa λ por hora.

El dinero pagado por cada póliza se distribuye exponencialmente con media 2000 euros,

¿cuál es la media y la varianza de la cantidad de dinero pagado por la compañía en cuatro semanas?

El planteado se corresponde con un **proceso de Poisson compuesto** $\{N(t), t > 0\}$ se corresponde con el número de pólizas recibidas e $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ son la familia de variables aleatorias que modelizan la cantidad pagada por cada una de estas pólizas. $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de forma exponencial con tasa $1/2000$.

$W(t)$ como la variable aleatoria que refleja el dinero abonada por la compañía en tiempo t .

$$W(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ahora la esperanza de $W(4)$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E[W(4) \mid N(4) = n] P(N(4) = n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^n Y_i\right] P(N(4) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n E[Y_i]\right) P(N(4) = n) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} n \times 2000 \times P(N(4) = n) = 2000 \sum_{n=0}^{\infty} n \times P(N(4) = n) = \\
 &= 2000 \times E[N(4)] = 5 \times 4 \times 2000 = 40000 \text{ euros.}
 \end{aligned}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ...
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



ahora la varianza de W(4)

$$Var(W(4)) = E[Var(W(4) | N(4))] + Var(E[W(4) | N(4)])$$

$$E[Var(W(4) | N(4) = n)] = Var\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = nVar(Y_i) = n \times 2000^2 \Rightarrow$$

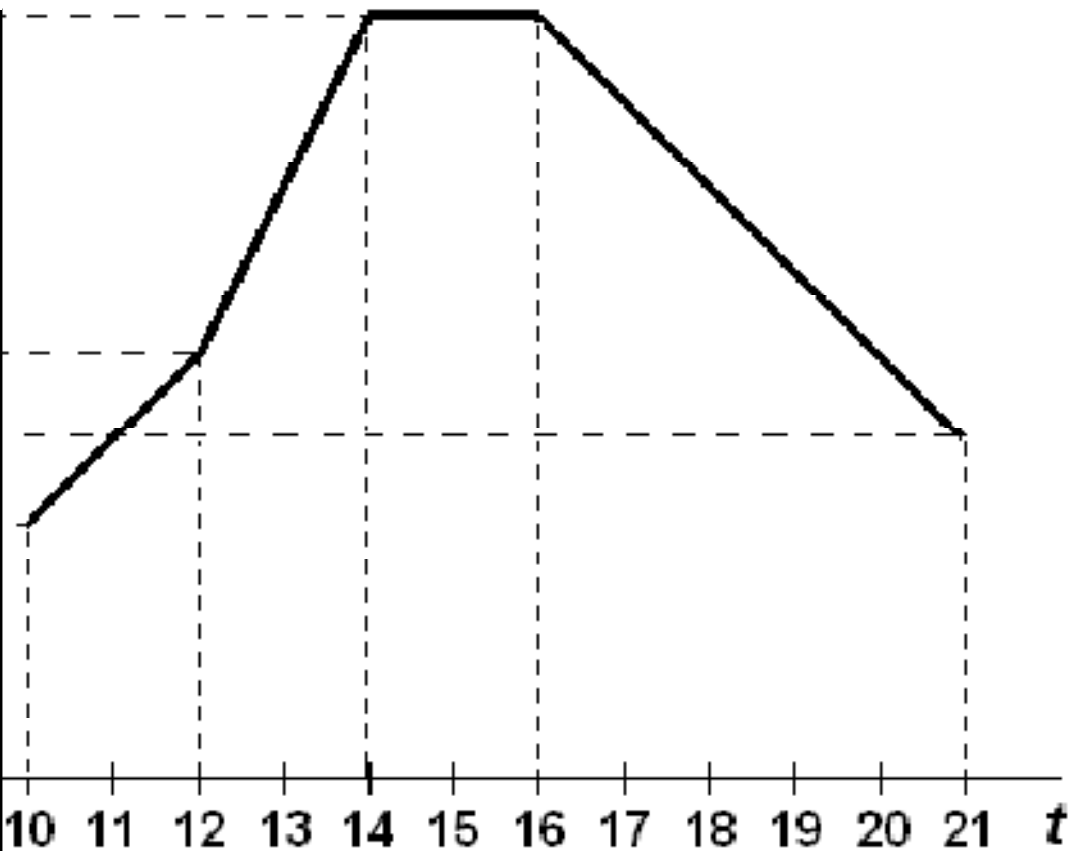
$$E[Var(W(4) | N(4))] = E[N(4)] \times 2000^2 = 5 \times 4 \times 2000^2 = 8 \times 10^7$$

$$Var(E[W(4)|N(4)]) = Var(N(4)E[Y]) = (E[Y])^2 Var(N(4)) = (2000)^2 \times 4 \times 5 = 8 \times 10^7$$

$$Var(W(4)) = 8 \times 10^7 + 8 \times 10^7 = 16 \times 10^7$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
...
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

*clientes a una tienda se rige por un proceso de
nogéneo cuya función de intensidad a lo largo
stra en la siguiente figura:*



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



1
1
c



ueden ser de dos tipos:
ltos.

1 observada de clientes de cada uno de los tipos es
es y 70% de adultos.

o por persona en la tienda es de
los jóvenes y 21 euros para los adultos.

os esperados a. en la tienda a lo largo del día.

lidad de que entre las : y las : horas lleguen jóvenes.

ue a lo largo del día han llegado personas,
obabilidad de que el quinto adulto haya llegado antes que
a?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

estimar los ingresos esperados a lo largo del día
 calcular el número medio de clientes esperado.

del enunciado se tiene que

$$\lambda(t) = \begin{cases} t - 7, & \text{si } 10 \leq t \leq 12 \\ 2t - 19, & \text{si } 12 \leq t \leq 14 \\ 9, & \text{si } 14 \leq t \leq 16 \\ 25 - t, & \text{si } 16 \leq t \leq 21 \end{cases}$$

$$\int_{10}^t \lambda(s) ds = \begin{cases} \int_{10}^t (s - 7) ds = \frac{t^2}{2} - 7t + 20, & \text{si } 10 \leq t \leq 12 \\ \int_{10}^{12} \lambda(s) ds + \int_{12}^t (2s - 19) ds = t^2 - 19t + 92, & \text{si } 12 \leq t \leq 14 \\ \int_{10}^{14} \lambda(s) ds + \int_{14}^t 9 ds = 9t - 104, & \text{si } 14 \leq t \leq 16 \\ \int_{10}^{16} \lambda(s) ds + \int_{16}^t (25 - s) ds = -\frac{t^2}{2} + 25t - 232, & \text{si } 16 \leq t \leq 21 \end{cases}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

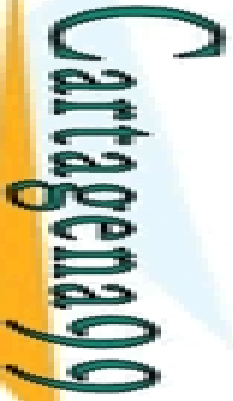
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

medio de clientes al día

$$E(X) = 10 = \left(-\frac{21^2}{2} - 25 \times 21 - 232 \right) - 0 = 72.5.$$

... cuenta la distribución del tipo de clientes y el ingreso obtenido por cada uno de ellos

$$E[\text{Ingresos}] = 72.5 \times (0.3 \times 12 + 0.7 \times 21) = 1326.75 \text{ euros.}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ...
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



...os $m_j(t)$ a la función de valor medio de
...enes a la tienda.

b
ll
A

...e $m_j(t) = 0.3 * m(t)$. con lo que

$$\begin{aligned}
 \dots \text{ en } [11 : 00 - 15 : 00]) &= P(N_j(15) - N_j(11) = 5) \\
 &= e^{-(m_j(15)-m_j(11))} \frac{(m_j(15) - m_j(11))^5}{5!} = \\
 &= e^{-(9.3-1.05)} - \frac{(9.3 - 1.05)^5}{5!} = \\
 &= e^{-8.25} - \frac{8.25^5}{5!} \approx 0.083.
 \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



idad de que el quinto adulto llegue antes que
1 coincide con la probabilidad de que entre
7 clientes que lleguen haya 5 ó más adultos, que,
enta la probabilidad de que los clientes que
óvenes ó adultos, vendrá dado por la expresión

$$\begin{aligned}
\text{adultos en las 7 primeras llegadas}) &= \sum_{n=5}^7 \binom{7}{n} 0.7^n \times 0.3^{7-n} = \\
&= \sum_{n=5}^7 \frac{7!}{n! \times (7-n)!} 0.7^n \times 0.3^{7-n} \\
&= 0.318 + 0.247 + 0.082 = 0.647
\end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ...
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70