Problema 1. (Expresión de números natural en bases distintas de la decimal). Demostrar que, dado un natural $q > 1$, todo número natural n puede expresarse de manera única en la forma

$$a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_1 q + a_0,$$

con $0 \leq a_i < q$, donde k es el único natural para el que se verifica $q^k \leq n < q^{k+1}$.

Problema 2. Sea

$$a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0; \;\; a_i \in \{0, 1\}$$

la expresión en base 2 (binaria) de un cierto número natural. Expresar, en base 2, cociente y resto de la división por 2 de dicho número.

Problema 3. Dados a y b enteros no nulos, los podemos escribir en la forma

$$a = \pm \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}, \quad b = \pm \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}, \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0$$

donde los p_i son todos los primos que dividen a ab. Comprobar que

$mcd(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}$ y $mcm(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}}$

Problema 4. Para cada uno de los pares de enteros siguientes, calcular el máximo común divisor utilizando el algoritmo de Euclides:

(i) 34, 21; (ii) 136, 51; (iii) 481, 325; (iv) 8711, 3206; (v) 1134, 1221;

En cada uno de los casos, resuelve la correspondiente identidad de Bézout.

Problema 5. El algoritmo de Euclides puede hacerse ligeramente más rápido si permitimos restos negativos en la forma que sigue:

$$r_{i-1} = r_i\, q_i + r_{i+1} \text{ con } -\left|\frac{r_i}{2}\right| < r_{i+1} \leq \left|\frac{r_i}{2}\right| .$$

Por ejemplo, si aplicamos este método para calcular el máximo común divisor de 59 y 49, se tiene

$$mcd(59, 49) = mcd(49, 10) = mcd(10,-1) = mcd(-1, 0) = 1.$$

Utilizar este algoritmo, conocido como del mínimo resto, para calcular los máximos comunes divisores del ejercicio anterior y resolver las correspondientes identidades de Bézout.

Problema 6. Demostrar las siguientes propiedades del máximo común divisor.

i) Si a y b son pares, $mcd(a,b) = 2\, mcd\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

ii) Si a es par y b es impar, $mcd(a,b) = mcd\left(\frac{a}{2}, b\right)$

iii) Si a y b son impares, $mcd(a,b) = mcd\left(\frac{|a-b|}{2}, b\right)$

Problema 7. Probar las siguientes propiedades de la sucesión de Fibonacci:

- Dos términos consecutivos de la sucesión son coprimos, es decir,

$$mcd(F_{n-1}, F_n) = 1 \text{ para } n \geq 1.$$

- El mayor natural menor que F_{n+2}/F_{n+1} (escrito $\lfloor F_{n+2}/F_{n+1} \rfloor$) es 1.
- El resto de la división de F_{n+1} por F_n es F_{n-1}

Problema 8. Demostrar que para cualquier entero k se tiene que $3k+2$ y $5k+3$ son primos entre sí.

Problema 9. Al aplicar el algoritmo de Euclides para calcular el mcd(a, b) se obtiene un resto primo p. Demostrar que mcd(a, b) =1 o mcd(a, b) = p.

$30X + 1107Y + 3030303Z = 25$; $10X + 11Y + 20Z = 10$;
$3X + 7Y + 12Z + 21T = 22$; $2200X + 1221Y - 2332Z + 101101T = 12$.

Problema 13. Resolver el sistema de ecuaciones diofánticas lineales:

$\begin{cases} 11X + 3Y + 5Z = 20 \\ 3X + 7Y + 10Z = 10 \end{cases}$; $\begin{cases} 2X + Y + 3Z = 7 \\ 8X - 5Y - 3Z = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} 2X + Y + Z - 2T = 5 \\ 3X + 2Y - Z + 4T = 1 \end{cases}$

Problema 14. Supongamos que el máximo común divisor de a y b es un primo p. ¿Cuáles son los posibles valores del máximo común divisor de a^2 y b? ¿Y del máximo común divisor de a^3 y b? Si $mcd(a, b) = p$, ¿cuánto vale $mcd(a^3, b^3)$?

Problema 15. Un turista estadounidense va a pasar unos días de vacaciones en París, Madrid y Cracovia y desea cambiar 810 dólares en euros y en zlotys. Sabiendo que el euro se cotiza a 0´90 dólares y un zloty a 0´24, ¿de cuántas formas posibles puede hacer el cambio si necesita para su estancia en Cracovia, al menos, 3000 zlotys?

Problema 16. Sean dados dos números naturales no nulos a y b. ¿Es posible escribir el número racional $\frac{1}{mcm(a,b)}$ como suma de dos racionales de denominadores a y b? En caso de respuesta afirmativa, esbozar un algoritmo para el cálculo de dichos racionales.

Problema 17. Una cierta empresa fabrica tres productos A, B y C que vende a 590, 410 y 300 euros respectivamente. Calcular cuántas unidades de cada producto se vendieron en un día determinado sabiendo que:

- La recaudación por la venta de los productos fue de 32420 euros.
- Se vendieron más unidades de A que de B.
- El número de unidades de C vendidas fue mayor que 83.

Problema 18. Resolver el siguiente problema: Si un gallo cuesta siete monedas, una gallina cinco monedas y tres pollos una moneda, ¿de cuántas formas distintas pueden comprarse un total de trescientas aves (gallos, gallinas y pollos) si disponemos de quinientas monedas? Escribir cada una de estas formas posibles.

Problema 19. Una compañía aérea ofrece tres tipos de billetes en sus vuelos de Madrid a París. Los billetes de clase preferente cuestan 150 euros, los de clase turista con derecho a comida 110 y el resto 67. Si, en un vuelo concreto un total de 100 pasajeros pagaron un total de 10766 euros, ¿cuántos billetes de cada tipo se vendieron?

Problema 20. Probar que, para cada número natural n existen siempre n números compuestos consecutivos.

Problema 21. Si mn es un cuadrado perfecto y $mcd(m, n) = 1$, demostrar que m y n son también cuadrados perfectos.

Problema 22. (*Números de Fermat*) Demostrar que si $2^m + 1$ es primo, m es una potencia de 2, es decir, $m = 2^n$ para algún natural n.

Problema 23. Un *primo de Mersenne* es un número primo de la forma 2^n-1. Demostrar que si 2^n-1 es primo, n ha de ser primo.

Problema 24. Dado un entero positivo n, sea $\sigma(n) = \sum_{d/n} d$ la suma de todos sus divisores positivos. Por ejemplo, $\sigma(27) = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$.
Demostrar que si $mcd(m, n) = 1$, $\sigma(nm) = \sigma(n)\,\sigma(m)$ y encontrar una fórmula para calcular $\sigma(n)$ a partir de la descomposición de n en factores primos.

Problema 25. Un *número perfecto* es un entero positivo que es igual a la suma de sus