
**COLECCIÓN DE PROBLEMAS DE
MICROONDAS**

Luis E. García Castillo
Daniel Segovia Vargas
Alejandro García Lampérez

BORRADOR

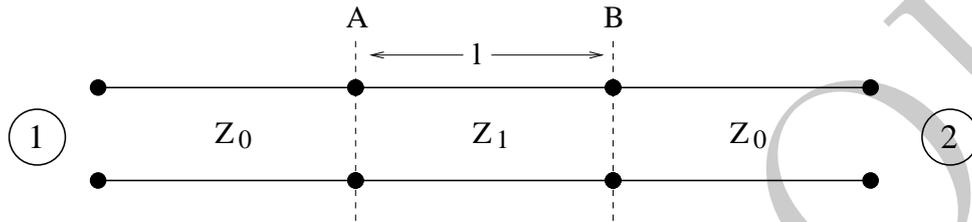
BORRADOR

Índice

PARÁMETROS S	2
1: t_adapt_linea_mitadlambda.tex	2
2: p_potencias_linea_2.tex	3
3: t_insercion_RedSinPerdidas.tex	7
4: t_coefreflex_cambio_imped_2.tex	7
5: t_estudio_autovaloresS_1.tex	7
6: t_paramS_cambioplano.tex	10
7: t_paramS_stub-en-corto.tex	11
8: p_paramS_varios.tex	14
9: p_paramS_potencia_TplanoE_adaptadaP1.tex	19
10: p_potencias_paramS+linea.tex	20
11: p_dos_impedancias.tex	25
12: t_paramS_S11=S22_S21=S12.tex	28
13: p_S_simple_stub.tex	29
14: p_paramS_RedAdaptadora_50_100.tex	31
15: t_S11_red_adaptacion.tex	34
16: p_matriz_s_lambda_cuartos.tex	35
17: t_paramS_cuadripolo_unilateral.tex	38
18: p_paramS_Rserie_lineasZ01Z02.tex	43
19: p_paramS_ctogenerico+aislador.tex	46
20: p_aislador_ondas.tex	47
21: p_paramS_redT_simetrica_reactiva.tex	52
22: p_paramS_redT_reactiva.tex	53
23: t_estudio_autovaloresS_RatRace.tex	55
Ejercicios no resueltos	61
24: t_coefreflex_cambio_imped.tex	61
25: t_coefreflex_cambio_imped_redes_en_cascada.tex	61
26: p_paramS_potencias_cuadripolo_1.tex	61
27: p_matriz_s_adapt_lambda_cuartos.tex	62
28: p_paramS_redT_simetrica.tex	62
29: t_paramS_union3puertas_adaptacion.tex	63
30: p_paramS_Gt_3to2puertas.tex	63

PARÁMETROS S

1. Considere un circuito de 2 puertos formado por dos tramos de línea de impedancia característica Z_0 conectados entre sí por un tramo de línea de impedancia característica $Z_1 \neq Z_0$ y longitud l .



Razone si es posible que $S_{ii}^{Z_0} = 0$ ($i = 1, 2$) para algún valor de l . En caso afirmativo indique el valor (o valores) de l para los que $S_{ii}^{Z_0} = 0$.

NOTA: Todas las líneas son sin pérdidas

Respuesta:

La respuesta es que sí es posible conseguir ver Z_0 a la entrada de la puerta 1 (y 2) cuando cargamos con Z_0 la puerta 2 (y 1), es decir, $S_{11}^{Z_0} = 0$ (y $S_{22}^{Z_0} = 0$). Cualquier valor de l que sea múltiplo de $\lambda/2$ hace que sea así.

Se puede razonar de diferentes maneras. Una de ellas, es viendo que cualquier múltiplo de $\lambda/2$ produce un desplazamiento de 360° en la carta de Smith, o visto de otra forma, la impedancia es la misma en los puntos A y B en esos casos. Y da igual respecto a que impedancia Z_1 estemos normalizando para utilizar la carta de Smith. Lo crucial es que el punto en la carta es el mismo. Por lo tanto, respecto a cualquier valor de Z_1 , la impedancia que vemos en A es la misma que vemos en B que es Z_0 .

Otra forma de razonar lo anterior es en base a las fórmulas de la impedancia vista a la entrada de una línea de Z_1 cargada con Z_0 . Lo más sencillo es recordar como varía el coeficiente de reflexión a lo largo de la línea de Z_1 . Considerando el S_{11} , que corresponde al coeficiente de reflexión respecto a Z_0 en el punto A,

$$\Gamma_A^{Z_1} = \Gamma_B^{Z_1} e^{-2j\beta l} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} e^{-2j\beta l}$$

se observa que para $l = n\lambda/2$ ($= 1, 2, \dots$) $\Gamma_A^{Z_1} = \Gamma_B^{Z_1}$ dado que $e^{-2j\beta l} = 1$. La impedancia Z_{en} correspondiente a $\Gamma_B^{Z_1}$ es:

$$Z_{en} = Z_1 \frac{1 + \Gamma_B^{Z_1}}{1 - \Gamma_B^{Z_1}} = Z_0$$

por lo que $S_{11}^{Z_0} = \frac{Z_{en} - Z_0}{Z_{en} + Z_0} = 0$.

El razonamiento es idéntico para la otra puerta.

2. Se ha caracterizado un tramo de línea de transmisión de impedancia característica $Z_c = 2Z_0$ rellena de un dieléctrico de $\epsilon_r=2.24$ y con una longitud $\lambda/4$, siendo λ la longitud de onda en la línea a la frecuencia de trabajo, $f_0=2$ GHz.

Sabiendo que a la frecuencia de trabajo f_0 los módulos de los parámetros S_{11} y S_{21} referidos a Z_0 tienen los valores siguientes:

$$|S_{11}| = 0.5649$$

$$|S_{21}| = 0.7509$$

- Calcule la ganancia de potencia, $G_p(\text{dB})$, cuando en la puerta de entrada se conecta un generador de frecuencia f_0 , impedancia interna Z_0 y potencia disponible P_{dg} , y se carga la puerta de salida con $Z_L = Z_0$.
- A partir de la definición de ganancia en potencia y utilizando los resultados del apartado anterior, obtenga la constante de atenuación de la línea.

Respuesta:

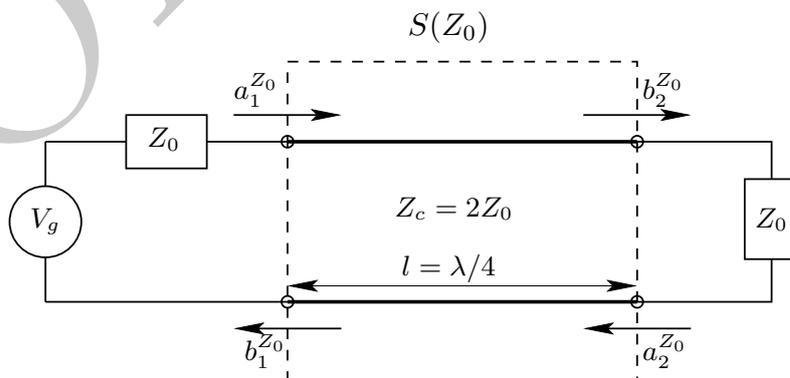
- Atendiendo a la definición de ganancia de potencia se tiene:

$$G_P \equiv \frac{\text{Potencia entregada a la carga}}{\text{Potencia entregada al cuadripolo}} = \frac{P_L}{P_{CP}}$$

La potencia entregada al cuadripolo P_{CP} se obtiene fácilmente razonando en base a ondas de potencia (véase la figura):

$$P_{CP} = |a_1|^2 - |b_1|^2 = |a_1|^2(1 - |\Gamma_{in}|^2)$$

donde $|\Gamma_{in}| = |S_{11}(Z_0)| = 0.5649$ dado que el cuadripolo está cargado con Z_0 .



Por tanto, la potencia entregada al cuadripolo P_{CP} queda:

$$P_{CP} = |a_1|^2(1 - |S_{11}|^2)$$

Por otro lado, para la potencia entregada a la carga P_L se tiene: $P_L = |b_2|^2 - |a_2|^2 = |b_2|^2$ dado que la impedancia de carga es igual a Z_0 y, en ese caso, $a_2 = 0$. Nótese que por ser $a_2 = 0$, se tiene que $b_2 = S_{21}a_1$.

Por todo ello:

$$G_P = \frac{|a_1|^2 |S_{21}|^2}{|a_1|^2(1 - |S_{11}|^2)} = \frac{|S_{21}|^2}{(1 - |S_{11}|^2)} = \frac{0.7509^2}{(1 - 0.5649^2)} = 0.8281 = -0.82 \text{ dB}$$

Cabe decir que al ser la impedancia interna del generador Z_0 se tiene que $|a_1|^2 = P_{dg}$. Sin embargo, esto no es un hecho relevante dado que el generador no ha jugado ningún papel en la obtención de la expresión de la ganancia de potencia; por otro lado, como es lógico dado que la ganancia de potencia es independiente de la entrada.

Nótese que lo que se ha hecho es sencillamente deducir la expresión de la ganancia de potencia para el caso particular del enunciado. Obviamente, el mismo resultado puede obtenerse¹ particularizando en la expresión general de la ganancia de potencia

$$G_P = \frac{1}{(1 - |S'_{11}|^2)} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_2|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_2|^2} = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\Gamma_2|^2)}{|(1 - S_{22}\Gamma_2)|^2 - |S_{11} - \Delta\Gamma_2|^2}$$

al caso de $\Gamma_2 \equiv \Gamma_L^{Z_0} = 0$ y $S'_{11} \equiv \Gamma_{in}^{Z_0} = S_{11}$.

Nótese que se emplean los coeficientes de reflexión respecto a Z_0 dado que los parámetros S que se emplean están referidos a Z_0 . De no hacerse así el resultado sería incorrecto.

Otra forma de haber razonado la obtención de la ganancia de potencia G_P es a partir del hecho de que la ganancia de trasducción G_T de un cuadripolo cargado con las impedancias de referencia de sus parámetros S (como es el caso del enunciado) es directamente $|S_{21}|^2$ y de que la ganancia de potencia es la ganancia de trasducción cuando existe adaptación conjugada a la salida (es decir, que $G_T = M_1 G_P$ donde M_1 demota el factor de desadaptación a la entrada del cuadripolo). De este modo,

$$G_P = \frac{G_T}{M_1} \quad \text{donde } G_T = |S_{21}|^2$$

Por otro lado, la expresión del factor de desadaptación de impedancias M_1 (referido al del plano entre la impedancia de generador y el cuadripolo) expresado en razón de coeficientes de reflexión referidos a impedancia Z_0 es:

$$M_1 = \frac{(1 - |\Gamma_g^{Z_0}|^2)(1 - |\Gamma_{in}^{Z_0}|^2)}{|1 - \Gamma_g^{Z_0}\Gamma_{in}^{Z_0}|^2} = 1 - |\Gamma_{in}^{Z_0}|^2 = 1 - |S_{11}|^2$$

¹Aunque este procedimiento es estrictamente válido, la intención del enunciado era obtener la expresión de la ganancia de potencia tal y como se ha mostrado

dado que $\Gamma_g^{Z_0} \equiv 0$ (debido a que $Z_g = Z_0$) y que a la salida del cuadripolo $Z_L = Z_0$ por lo que $\Gamma_{in}^{Z_0} = S_{11}$.

Finalmente, combinando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos:

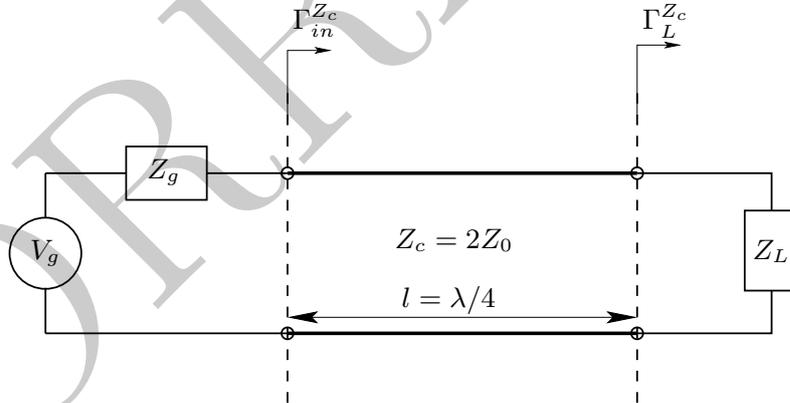
$$G_P = \frac{G_T}{M_1} = \frac{|S_{21}|^2}{1 - |S_{11}|^2}$$

- b) En el apartado anterior se ha obtenido una $G_P = 0.8281$ con $Z_g = Z_L = Z_0$. Para ello se han empleado las ondas de potencia en función de Z_0 para definir las magnitudes que intervienen en su definición. De este modo, se llega a una expresión en función de los parámetros $S(Z_0)$ y coeficientes de reflexión en función de Z_0 . En este apartado conviene trabajar con ondas de potencia referidas a la impedancia característica de la línea Z_c (las que corresponden físicamente a las ondas presentes en la línea) dado que G_p se puede expresar directamente en función de parámetros de la línea (como son su constante de atenuación α y longitud l):

$$G_p = \frac{P_L}{P_{CP}} = \frac{P^+(z=0)e^{-2\alpha l}(1 - |\Gamma_L^{Z_c}|^2)}{P^+(z=0)(1 - |\Gamma_{in}^{Z_c}|^2)}$$

donde

$$\Gamma_L^{Z_c} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = -\frac{1}{3}; \quad \Gamma_{in}^{Z_c} = \frac{Z_{in} - Z_c}{Z_{in} + Z_c} = \Gamma_L^{Z_c} e^{-2\alpha l} e^{-2j\beta l}$$



Por tanto, la constante de atenuación puede obtenerse a partir de las expresiones anteriores dado que G_p es conocido y $l = \lambda_0/(4\sqrt{\epsilon_r}) = 2.51$ cm. Es decir, se tiene:

$$G_p = \frac{e^{-2\alpha l}(1 - |\Gamma_L^{Z_c}|^2)}{1 - |\Gamma_{in}^{Z_c}|^2 e^{-4\alpha l}}; \quad G_p = 0.8281, \quad l = 2.51 \text{ cm}$$

que se puede expresar

$$|\Gamma_L^{Z_c}|^2 G_p (e^{-2\alpha l})^2 + (1 - |\Gamma_L^{Z_c}|^2) e^{-2\alpha l} - G_p = 0$$

Por tanto, las posibles soluciones para $e^{-2\alpha l}$ son:

$$e^{-2\alpha l} = \frac{-(1 - |\Gamma_L^{Z_c}|^2) \pm \sqrt{(1 - |\Gamma_L^{Z_c}|^2)^2 + 4|\Gamma_L^{Z_c}|^2 G_p^2}}{2|\Gamma_L^{Z_c}|^2 G_p} = \begin{cases} -10.5165 & \text{¡Imposible!} \\ 0.8558 & \text{Sol. válida} \end{cases}$$

de las que se obtiene finalmente el valor de α :

$$\alpha = -\frac{1}{2l} \ln(0.8558) = 3.11 \text{ Np/m}$$

Nótese que la obtención de α puede hacerse siguiendo el procedimiento siguiente (si bien no es lo que se pedía en el enunciado).

Partiendo de la relación entre los módulos de los coeficientes de reflexión en el final y el origen de la línea de transmisión,

$$\Gamma_{in}^{Z_c} = \Gamma_L^{Z_c} e^{-2\alpha l} e^{-2j\beta l} = -\Gamma_L^{Z_c} e^{-2\alpha l}$$

puede despejarse $e^{-2\alpha l}$:

$$e^{-2\alpha l} = \frac{\Gamma_{in}^{Z_c}}{-\Gamma_L^{Z_c}} = \frac{\Gamma_{in}^{Z_c}}{1/3}$$

Nótese que se ha utilizado el hecho de que la línea es de $\lambda/4$ en el signo “-” y que $\Gamma_L^{Z_c} = -1/3$

Por tanto, para poder obtener $e^{-2\alpha l}$ (y, obviamente α) necesitamos $\Gamma_{in}^{Z_c}$. Nótese que $\Gamma_{in}^{Z_0}$ es conocido: $\Gamma_{in}^{Z_0} = S_{11} = 0.5649$. Elegimos S_{11} real y positivo dado que se trata de una línea $\lambda/4$ acabada en una impedancia real (con signo del coeficiente de reflexión negativo).

El coeficiente de reflexión $\Gamma_{in}^{Z_c}$ puede obtenerse de $\Gamma_{in}^{Z_0}$ mediante un cambio de impedancia de referencia como se vio en teoría.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{in}^{Z_0}}{1 - \Gamma_{in}^{Z_0}} = 3.5966$$

$$\Gamma_{in}^{Z_c} = \frac{Z_{in} - Z_c}{Z_{in} + Z_c} = 0.2853$$

en los que se ha empleado $Z_0 = 1$ y $Z_c = 2 Z_0 = 2$. Nótese que el resultado es correcto, independientemente del valor elegido para Z_0 , siempre que se mantenga la relación entre Z_0 y Z_c .

Finalmente, obtenemos

$$e^{-2\alpha l} = \frac{\Gamma_{in}^{Z_c}}{1/3} = \frac{0.2853}{1/3} = 0.8558$$

-
3. ¿Pueden ser las pérdidas de inserción de un cuadripolo sin pérdidas diferentes de 0 dB? En caso afirmativo, ponga algún ejemplo y explíquelo.

Respuesta:

Si. Ejemplo: Una red de adaptación bien diseñada hace que pase más señal al otro lado cuando está presente que cuando no lo está. Por tanto, las pérdidas de inserción de la red de adaptación son negativas en dB (hay ganancia de inserción).

4. Se ha obtenido la matriz de parámetros S de un cuadripolo referida a $Z_0 = 50\Omega$:

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} 0.5_{180^\circ} & 0.08_{30^\circ} \\ 2.5_{70^\circ} & 0.8_{-100^\circ} \end{bmatrix}$$

Se desea calcular la matriz de parámetros S de dicho cuadripolo referida a impedancias de referencia de entrada y salida $Z_{01} = 75\Omega$ y $Z_{02} = 100\Omega$, respectivamente.

¿Cual es el coeficiente S_{11} de la matriz de parámetros S del cuadripolo referida a las nuevas impedancias?

Respuesta:

El problema puede resolverse efectuando el cambio de impedancias de referencia de la matriz de parámetros S completa. Sin embargo, dado que sólo se piden los S_{ii} ($i = 1, 2$), el problema puede resolverse de una forma más sencilla tal y como se detalla a continuación.

Para ello, hay que saber el significado de los coeficientes S_{ii} de la matriz de parámetros S . El coeficiente S_{ii} de la matriz de parámetros S corresponde al coeficiente de reflexión (respecto Z_{0i}) en la puerta i cuando se cargan las demás puertas j ($j \neq i$) con las impedancias Z_{0j} . Por tanto, en el caso de la puerta 1 se tendría:

$$S_{11} = \Gamma_{in}^{75\Omega}(Z_L = 100\Omega) = \frac{Z_{in}(Z_L = 100\Omega) - 75}{Z_{in}(Z_L = 100\Omega) + 75} = 0.635_{175.58^\circ}$$

donde

$$Z_{in}(Z_L = 100\Omega) = 50 \frac{1 + \Gamma_{in}^{50\Omega}(Z_L = 100\Omega)}{1 - \Gamma_{in}^{50\Omega}(Z_L = 100\Omega)} = (16.75 + j2.75)\Omega$$

y

$$\Gamma_{in}^{50\Omega}(Z_L = 100\Omega) = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\rho_L}{1 - S_{22}\rho_L} = 0.49_{172.90^\circ}$$

donde $\rho_L = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}$ y los S_{ij} son los dados en el enunciado respecto a 50Ω .

5. Considere la matriz siguiente de parámetros S de un cuadripolo referida a Z_0 :

$$[S(Z_0)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Determine si se trata de un circuito sin pérdidas.
 b) En caso de que no se trate de un circuito sin pérdidas determine el carácter (activo o pasivo) del circuito.

NOTA: Para ello deberá considerar excitaciones en cuadratura, es decir, ondas de potencia a_1 y a_2 de igual módulo y desfasadas $\pm 90^\circ$. Obtenga el balance de potencia (potencia saliente del circuito menos potencia entrante al circuito) para los dos casos. A partir de los resultados obtenidos concluya sobre el carácter (activo o pasivo) del circuito.

Respuesta:

- a) No se trata de un circuito sin pérdidas dado que:

$$[S]^H[S] = \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \neq [I]$$

Nótese que

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 &= 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 &= 1 \end{aligned}$$

es condición necesaria pero no suficiente dado que, como se verá en el apartado siguiente, hay que tener en cuenta las fases al sumar ondas de potencia.

- b) En el apartado anterior se ha demostrado que el circuito no es sin pérdidas, es decir, que al menos en algún caso (excitaciones de sus entradas) el circuito devuelve una cantidad de potencia diferente a la que le ha sido entregada. Si para cualquier combinación de excitaciones a sus entradas el circuito devuelve una potencia igual o menor que la que le ha sido entregada tenemos un un circuito pasivo. Por el contrario, si para alguna combinación de excitaciones de sus entradas la potencia devuelta por el circuito es mayor que la que le ha sido entregada tenemos un circuito activo.

Siguiendo lo indicado en el enunciado se va a “probar” con los dos tipos de excitaciones en cuadratura posibles: la excitación de la puerta 2, a_2 , desfasada $\pm 90^\circ$ respecto a la excitación de la puerta 1, a_1 .

Consideremos en primer lugar el caso de puerta 2 adelantada 90° respecto a la excitación de la puerta 1, es decir,

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix}$$

Dada la linealidad del circuito, se puede analizar cada una de las excitaciones por separado:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ j \end{Bmatrix}$$

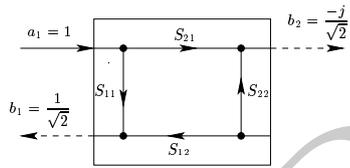
y calcular la respuesta global en base a la suma de las respuestas a cada una de las excitaciones.

De igual modo se haría con el caso de puerta 2 retrasada 90° respecto a la excitación de la puerta 1, es decir,

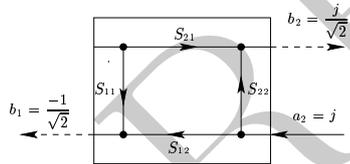
$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -j \end{Bmatrix}$$

En la figura a continuación se muestran las ondas de potencia entrantes y salientes al circuito en cada caso:

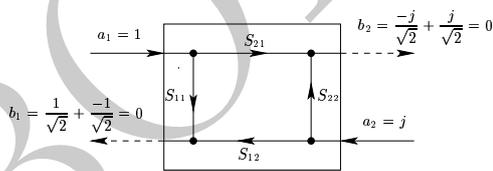
$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ j \end{Bmatrix}$$



+



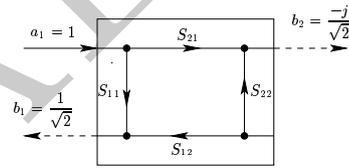
||



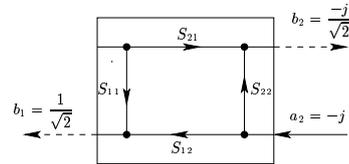
$$\sum_i |a_i|^2 = |1|^2 + |j|^2 = 2$$

$$\sum_i |b_i|^2 = |0|^2 + |0|^2 = 0$$

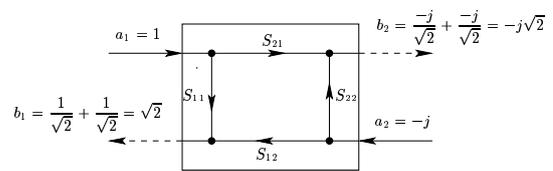
$$\{a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -j \end{Bmatrix}$$



+



||



$$\sum_i |a_i|^2 = |1|^2 + |-j|^2 = 2$$

$$\sum_i |b_i|^2 = |\sqrt{2}|^2 + |-j\sqrt{2}|^2 = 4$$

Se observa que para el primer caso $\{a\} = \langle 1, j \rangle^T$ la potencia devuelta por el circuito $\sum_i |b_i|^2$ es nula, es decir, el circuito disipa toda la potencia. Sin embargo, en el segundo caso $\{a\} = \langle 1, -j \rangle^T$ la potencia devuelta por el circuito $\sum_i |b_i|^2$ es 2 veces la que entra $\sum_i |a_i|^2$, es decir, ha existido amplificación. Por tanto, se concluye que el circuito es activo.

NOTA: Nótese dos cosas. Por una parte que **se suman ondas de potencia y no potencias** para obtener la respuesta global. Ello es debido a que el circuito es lineal respecto a las ondas de potencia (que corresponden a ondas de voltaje normalizadas) pero no es lineal respecto a potencias. Por otro lado, las ondas de potencia vienen dadas por números complejos, es decir, son la representación fasorial correspondiente a régimen permanente sinusoidal. Por tanto, hay que **tener en cuenta la fase y no sólo el módulo**. Un buen ejemplo es el caso primero donde $\{a\} = \langle 1, j \rangle^T$ donde se obtienen ondas $b_1 = \pm 1/\sqrt{2} \neq 0$ y, sin embargo, la suma de ambas es nula dado que están en contrafase.

NOTA: Existe otra forma de concluir sobre el carácter activo o pasivo del circuito. Dicha forma se muestra a continuación por completitud; sin embargo, era obligado resolver el ejercicio de la manera que se ha mostrado anteriormente.

Si se calculan los autovalores λ_i , y autovectores asociados ν_i , de la matriz

$$[I] - [S]^H [S] = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

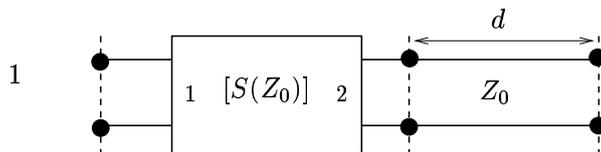
se obtiene:

$$\lambda = 1; \quad \nu = \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = -1; \quad \nu = \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix}$$

El autovalor positivo indica que con excitaciones del tipo $\{a\} \equiv \nu = \langle 1, j \rangle^T$ el circuito entrega menos potencia de la que le se suministra. Sin embargo, el otro tipo de excitaciones $\{a\} \equiv \nu = \langle 1, -j \rangle^T$ corresponden a un autovalor negativo, es decir, el circuito entrega más potencia que la que se suministra. Por tanto se concluye que es activo dado que existe alguna combinación de excitaciones en sus puertas (en concreto, las correspondientes a $\{a\} = C \langle 1, j \rangle^T$ donde C es una constante compleja cualesquiera) que proporciona ganancia de potencia. Nótese que los dos autovectores corresponden a las dos excitaciones en cuadratura para las que se pedía hacer el balance de potencia.

6. Considere la matriz de parámetros S de un cuadripolo referida a Z_0 eligiendo unos determinados planos de referencia, $[S(Z_0)]$. Obtenga la nueva matriz de parámetros S referida a Z_0 , $[S'(Z_0)]$ si se aleja el plano de referencia de la puerta de salida la distancia d ($d = \lambda/2$, siendo λ la longitud de onda en la línea de acceso a la frecuencia de trabajo, f_0). Véase la Figura. La constante de atenuación de la línea de acceso es α (Np/m) a f_0 . Expresé los resultados en función de los valores de la matriz $[S(Z_0)]$ de partida, α y λ .



Respuesta:

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11} & S'_{12} &= -S_{12}e^{-\alpha\lambda/2} \\ S'_{21} &= -S_{21}e^{-\alpha\lambda/2} & S'_{22} &= S_{22}e^{-\alpha\lambda} \end{aligned}$$

7. Considere una sección de línea de transmisión de impedancia característica Z_0 y constante de propagación $\gamma = \alpha + j\beta$ con un *stub* paralelo (de impedancia característica Z_c) acabado en cortocircuito tal y como se muestra en la Figura 1.

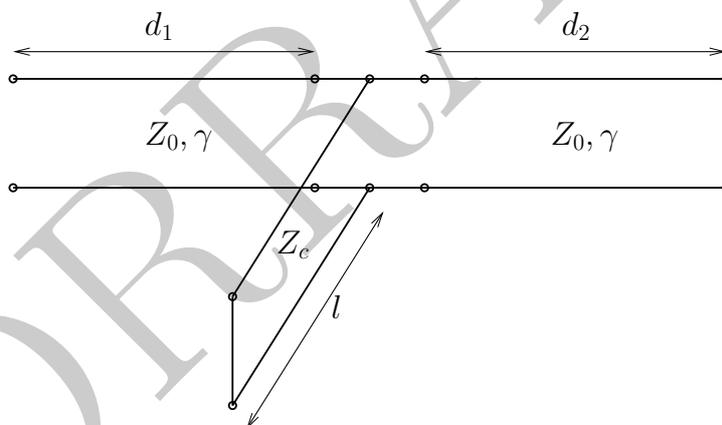


Figura 1

Calcule la matriz de parámetros S respecto a Z_0 de dicha estructura. Para ello, deberá seguir necesariamente los pasos siguientes:

- Obtener los parámetros S de una admitancia paralelo respecto a impedancias de referencia Z_0 en ambas puertas haciendo uso de la definición de las ondas de potencia en términos de voltaje y corriente.

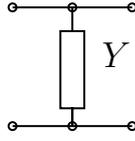


Figura 2

- b) A partir de los resultados del apartado anterior demostrar que los parámetros $S(Z_0)$ del circuito de la Figura 3 son

$$[S(Z_0)] = \frac{1}{2Y_0 - jY_c \cot(\beta_{\text{stub}}l)} \begin{bmatrix} jY_c \cot(\beta_{\text{stub}}l) & 2Y_0 \\ 2Y_0 & jY_c \cot(\beta_{\text{stub}}l) \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde β_{stub} se refiere a la velocidad de fase en la línea que hace de *stub*, $Y_0 = 1/Z_0$, y $Y_c = 1/Z_c$.

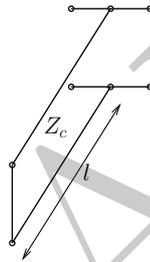


Figura 3

- c) Finalmente, a partir del resultado del apartado anterior obtener los parámetros $S(Z_0)$ de la estructura de la Figura 1.

NOTA: La línea del *stub* es sin pérdidas

Respuesta:

- a) Los parámetros S_{ji} se definen como $S_{ji} = b_j/a_i$ cuando $a_k = 0$ ($k \neq i$) donde a_i , b_i denotan las ondas de potencia entrantes y salientes, respectivamente, al circuito. A su vez, las ondas de potencia se definen, en términos de los voltajes V_i y corriente I_i presentes en las puertas:

$$a_i = \frac{V_i + Z_{0i}I_i}{\sqrt{8Z_{0i}}}, \quad b_i = \frac{V_i - Z_{0i}I_i}{\sqrt{8Z_{0i}}} \quad (2)$$

Las “medidas” se realizan excitando una puerta i (con un generador de impedancia interna Z_{0i} y cargando las puertas j ($j \neq i$) restantes con impedancias de carga Z_{0j} de modo que $a_j = 0$. De este modo, observando las b_j de todas la puertas se obtienen los S_{ji} , es decir, la columna i de la matriz de parámetros S . Hay que hacer, en general, tantas “medidas” como puertas tenga la estructura. En muchos casos (como éste), es posible obtener todos los parámetros S en base a menos “medidas” aplicando reciprocidad y simetría.

Consideremos que excitamos primero la puerta 1 (izqda en la figura) de modo que tenemos una situación como la de la Figura 4. Se tiene, por tanto, que

$$S_{11} = \frac{V_1 - Z_0 I_1}{V_1 + Z_0 I_1} = \frac{V_1 - V_1 Z_0 (Y + Y_0)}{V_1 + V_1 Z_0 (Y + Y_0)} = \frac{1 - Z_0 (Y + Y_0)}{1 + Z_0 (Y + Y_0)} = \frac{1 - (\bar{Y} + 1)}{1 + (\bar{Y} + 1)} = \frac{-\bar{Y}}{\bar{Y} + 2} \quad (3)$$

en donde se ha hecho uso de la relación $I_1 = V_1(Y + Y_0)$. Nótese igualmente que se considera $Z_{01} = Z_{02} = Z_0$.

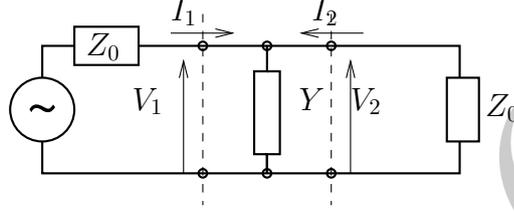


Figura 4

El cálculo de S_{21} se hace de forma análoga:

$$S_{21} = \frac{V_2 - Z_0 I_2}{V_1 + Z_0 I_1} = \frac{-2Z_0 I_2}{V_1(1 + Z_0(Y + Y_0))} = \frac{2V_1}{V_1(1 + Z_0(Y + Y_0))} = \frac{2}{\bar{Y} + 2} \quad (4)$$

en donde se ha empleado adicionalmente el hecho de que $V_2 = V_1$ y que $V_2 = -Z_0 I_2$.

Para calcular el S_{12} y el S_{22} habría que hacer un procedimiento análogo excitando la puerta 2 con un generador de impedancia interna Z_0 y cargando con Z_0 la puerta 1. Llegaríamos al resultado de $S_{22} = S_{11}$ y $S_{12} = S_{21}$. El resultado de $S_{12} = S_{21}$ lo sabíamos de antemano dado que el circuito es obviamente recíproco, lo que se traduce en la simetría de la matriz de parámetros S . Por otro lado, el resultado de $S_{22} = S_{11}$ era igualmente conocido dada la simetría de la estructura (no confundir con simetría de la matriz $[S]$): cuando “miramos” por la puerta 1 cargando la 2 con Z_0 vemos exactamente lo mismo que si “miramos” por la puerta 2 cargando la 1 con Z_0 . Por tanto, los coeficientes de reflexión, que es lo que son los S_{11} y S_{22} , son iguales.

- b) Una vez obtenidos los resultados del apartado anterior, en concreto las expresiones (3) y (4), lo que se pide en este apartado se obtiene sencillamente aplicando dichas expresiones al caso de $Y = Y_{\text{stub}} = 1/(jZ_c \tan(\beta_{\text{stub}}l)) = -jY_c \cot(\beta_{\text{stub}}l)$.

NOTA: La impedancia/admitancia del *stub* se obtiene de la ecuación (presente el chuleterio) de la impedancia vista en una línea de transmisión cargada con Z_L a una distancia l

$$Z_{\text{stub}} = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma l + Z_0 \sinh \gamma l}{Z_0 \cosh \gamma l + Z_L \sinh \gamma l} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma l}$$

sustituyendo $Z_L = 0$, o a partir del coeficiente de reflexión:

$$Z_{\text{stub}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{\text{stub}}}{1 - \Gamma_{\text{stub}}}; \quad \Gamma_{\text{stub}} = (-1)e^{-j2\beta_{\text{stub}}l}$$

- c) El circuito de la Figura 1 es el mismo que el de la Figura 3 pero cambiando los planos de referencia las distancias d_1 y d_2 en los accesos 1 y 2, respectivamente. Por tanto, la matriz de parámetros S del circuito de la Figura 1 ($[S]_{\text{Fig1}}$) está relacionado con la del circuito de la Figura 3 ($[S]_{\text{Fig3}}$ dados por (1)) de la forma:

$$[S]_{\text{Fig1}} = [P][S]_{\text{Fig3}}[P]$$

donde $[P]$ es una matriz diagonal que contiene la información sobre el cambio de plano de referencia para las ondas de potencia de cada puerto:

$$\begin{bmatrix} e^{-\gamma d_1} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma d_2} \end{bmatrix}$$

De esta forma se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} S_{11}^{\text{Fig1}} &= S_{11}^{\text{Fig3}} e^{-2\gamma d_1} = \frac{jY_c \cot(\beta_{\text{stub}} l)}{2Y_0 - jY_c \cot(\beta_{\text{stub}} l)} e^{-2\gamma d_1} \\ S_{22}^{\text{Fig1}} &= S_{22}^{\text{Fig3}} e^{-2\gamma d_2} = \frac{jY_c \cot(\beta_{\text{stub}} l)}{2Y_0 - jY_c \cot(\beta_{\text{stub}} l)} e^{-2\gamma d_2} \\ S_{21}^{\text{Fig1}} &= S_{12}^{\text{Fig1}} = S_{21}^{\text{Fig3}} e^{-j(\gamma d_1 + \gamma d_2)} = \frac{2Y_0}{2Y_0 - jY_c \cot(\beta_{\text{stub}} l)} e^{-j(\gamma d_1 + \gamma d_2)} \end{aligned}$$

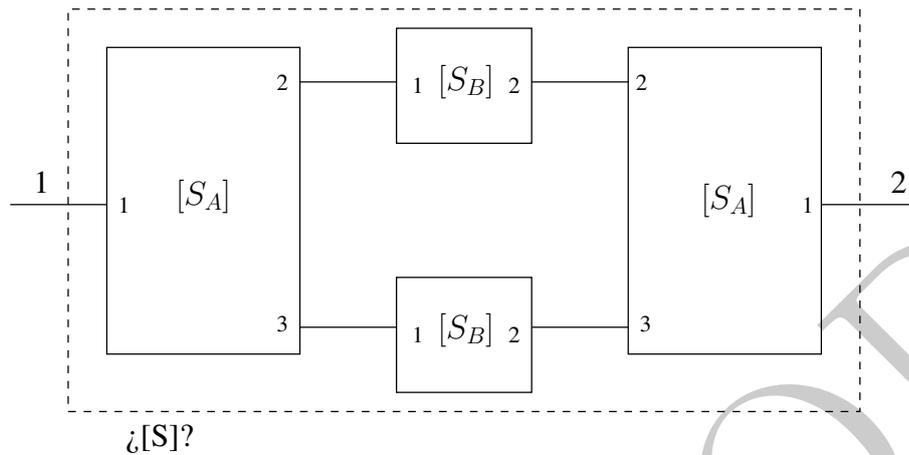
que podría haberse obtenido de igual modo sin más que relacionar las ondas de potencia en ambos planos de referencia, es decir,

$$a_i^{\text{Fig1}} = a_i^{\text{Fig3}} e^{\gamma d_i}, \quad b_i^{\text{Fig1}} = b_i^{\text{Fig3}} e^{-\gamma d_i}$$

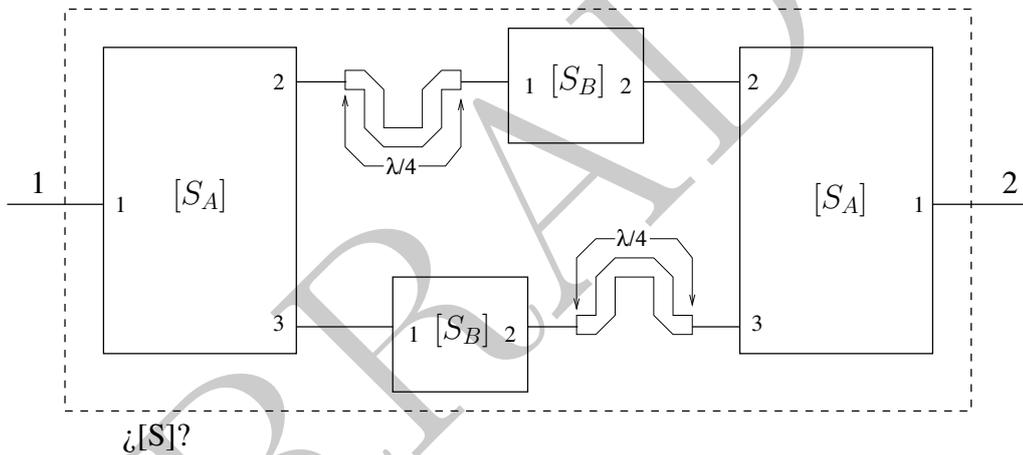
8. Considere las matrices de parámetros S (referidas a la impedancia Z_0) siguientes:

$$[S_A] = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [S_B] = \begin{bmatrix} 0.5j & 0 \\ 4 & 0.5j \end{bmatrix}$$

- a) Para cada una de las matrices de parámetros S anteriores, razone sobre los siguientes aspectos de los circuitos de microondas que representan:
- ¿Es un circuito recíproco?
 - ¿Es un circuito sin pérdidas (no disipativo)?
 - ¿Es un circuito pasivo?
- b) Calcule los parámetros S del circuito completo de la Figura que hace uso de los circuitos del apartado a. ¿De qué circuito se trata? ¿Qué ventajas y aplicaciones tiene la configuración de la figura?



- c) Considere el circuito anterior con el añadido de dos líneas de $\lambda/4$ según la Figura. Calcule los parámetros S del circuito completo. ¿Qué se consigue con las líneas de $\lambda/4$ añadidas?



Respuesta:

- a) Un circuito es recíproco si y sólo si su matriz de parámetros S es simétrica. Nótese que la reciprocidad se manifiesta igualmente en otras matrices que puedan caracterizar circuitos (de microondas o no) como son las matrices de impedancia $[Z]$ y admitancia $[Y]$. En todas ellas, se relacionan las respuestas del sistema a unas excitaciones. En las últimas las magnitudes en juego son voltaje y corriente y en el caso de la matriz de parámetros S son las ondas de potencia. Por tanto, el circuito representado por $[S_A]$ es recíproco y el correspondiente a $[S_B]$ no lo es.

Un circuito es sin pérdidas si y sólo si su matriz de parámetros S es unitaria, es decir, que su hermítica es su inversa: $[S]^H[S] = [I]$ (siendo $[I]$ la matriz identidad). Es fácil comprobar que para ninguna de las dos matrices de parámetros S consideradas se satisface dicha condición. Por tanto, afirmamos que ninguno de los dos circuitos es sin pérdidas.

Nótese que la condición $[S]^H[S] = [I]$ implica: $\{u_i\}^H\{u_j\} = \delta_{ij}$, $i = 1 \dots N$, $j = i \dots N$ (siendo u_i el vector columna de la matriz $[S]$ y N la dimensión de la matriz). Nótese que las relaciones anteriores no son más que el producto de las columnas de la matriz $[S]$ entre sí igualadas a cero o uno. Por tanto, basta con encontrar un caso (valores de i, j) en el que no se cumpla la relación para concluir que el circuito no es sin pérdidas. En particular, con $i = j$, se tiene $\sum_{k=1}^N |S_{ki}|^2 = 1$. Nótese que esta última relación no se cumple para $[S_A]$ con $k = 2, 3$ ni para $[S_B]$ con $k = 1, 2$. Con ello podemos afirmar que ninguno de los dos circuitos es sin pérdidas.

Para poder afirmar que un circuito es pasivo hay que asegurar que la potencia devuelta por el circuito (teniendo en cuenta todas sus puertas) siempre es mayor o igual que la potencia que se le ha introducido (también considerando todas sus puertas). El caso de estrictamente igual corresponde al caso de sin pérdidas. Dado que ninguno de los dos circuitos es sin pérdidas hay que comprobar la condición.

De teoría de la asignatura se tiene que la potencia disipada por el circuito (diferencia entre potencia entrante y saliente para todas sus puertas) es:

$$P_{\text{dis}} = \{A\}^H [I - [S]^H[S]] \{A\} \quad (1)$$

donde $\{A\}$ es el vector columna formado por la sondas de potencia entrantes a_i , $i = 1 \dots N$.

Por tanto, para que la potencia disipada sea siempre mayor que 0 para cualquier tipo de excitación, es decir, para todo $\{A\}$, debe cumplirse que la matriz $[I] - [S]^H[S]$ sea definida positiva. Para ello, es condición necesaria y suficiente que todos sus autovalores sean mayores o iguales que cero. Si alguno de los autovalores es menor que cero, significa que para la excitación $\{A\}$ correspondiente a su autovector asociado, la potencia disipada es negativa, es decir, la potencia saliente es mayor que la entrante y eso sólo puede ser si el circuito es activo.

Para las dos matrices del enunciado, es fácil comprobar que

$$[I] - [S_A]^H[S_A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [I] - [S_B]^H[S_B] = \begin{bmatrix} -15.25 & -2j \\ 2j & 0.75 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para la primera se tienen como autovalores λ_i (y autovectores asociados ν_i ²) los siguientes:

$$[I] - [S_A]^H[S_A] : \begin{cases} \lambda_1 = 0, & \nu_1 = \langle 1, 0, 0 \rangle^t \\ \lambda_2 = 0, & \nu_2 = \langle 0, 1, 1 \rangle^t \\ \lambda_3 = 1, & \nu_3 = \langle 0, 1, -1 \rangle^t \end{cases} \quad (3)$$

y para la segunda:

$$[I] - [S_B]^H[S_B] : \begin{cases} \lambda_1 = -15.496, & \nu_1 = \langle j, 0.12 \rangle^t \\ \lambda_2 = 0.996, & \nu_2 = \langle -0.12j, 1 \rangle^t \end{cases} \quad (4)$$

²Los autovectores no son necesarios para responder a lo que se pide pero se han calculado para comentar sobre ellos con posterioridad.

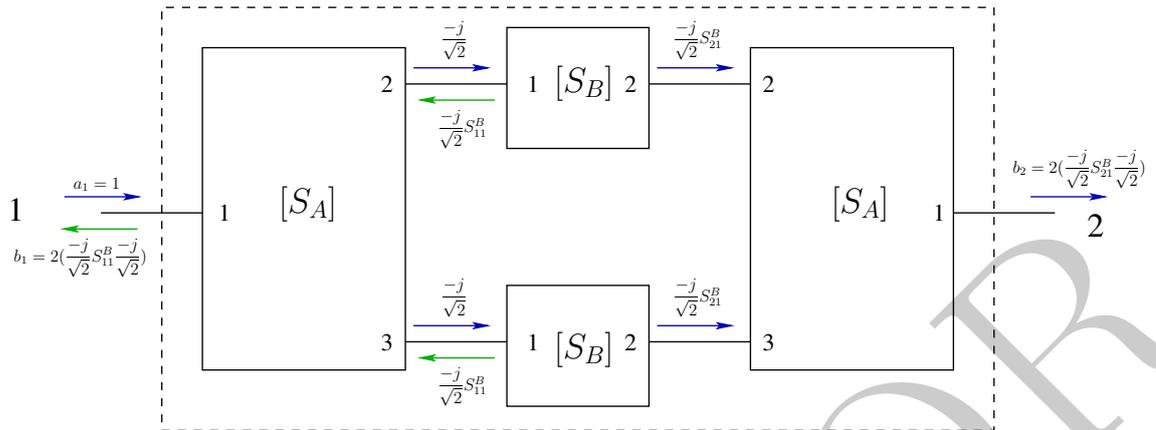
de lo que se concluye que el primer circuito es pasivo (todos sus autovalores son positivos) y el segundo no es pasivo sino activo dado que alguno (en concreto, uno) de sus autovalores es negativo.

Aunque no forma parte del ejercicio, es interesante observar los autovectores asociados a cada uno de los autovalores. Muy posiblemente haya observado que el primer circuito es un divisor/combinador Wilkinson de 1:2. La numeración de las puertas se corresponde de modo que la puerta 1 es la de entrada como divisor y las 2 y 3 las de entradas como combinador. De los autovectores y sus autovalores (dados en (3)), observamos que el primer circuito se comporta sin pérdidas cuando excitamos sólo por la puerta 1 o por la puerta 2 y 3 con la misma onda de potencia (excitación par como combinador). La otra excitación ortogonal a ella es la de excitación impar como combinador (ondas de potencia entrantes en 2 y 3 iguales en módulo y en contrafase) que corresponde al autovalor estrictamente positivo, es decir, en ese caso la potencia disipada es mayor que 0 (como sabemos es la disipada en la resistencia de aislamiento).

El segundo circuito es un amplificador en sentido de la puerta 1 a la 2. Por ello, encontramos autovectores que básicamente corresponden con excitar una puerta o la otra. Uno de ellos tiene asociado un autovalor negativo (lo que implica amplificación –comportamiento activo–) y el otro uno positivo –comportamiento disipativo– (un amplificador no deja pasar apenas señal de salida a entrada; en este caso estrictamente nada por ser unilateral). Nótese que en el caso del amplificador hubiera bastado con encontrar una excitación en la que se diera que la potencia saliente del circuito es mayor que la entrante. Una de ellas es la que consiste en entrar sólo por la puerta 1, por ejemplo, $\{A\} = \langle 1, 0 \rangle^t$. Vemos que en ese caso, la potencia entrante es la unidad mientras que la potencia saliente es $|0.25j|^2 + |4|^2 > 1$, por lo que podemos concluir, sin calcular los autovalores como en (4), que es activo.

- b) La forma más sencilla de calcular la matriz de parámetros S del circuito amplificador completo es mediante ondas de potencia. Para ello, se supone onda a_1 entrante en puerta 1 con la puerta cargada con la impedancia de referencia Z_0 lo que permite obtener S_{11} y S_{21} . De forma análoga se obtienen S_{12} y S_{22} suponiendo onda a_2 entrante en puerta 2 y la puerta 1 cargada con Z_0 .

En el caso de onda a_1 entrante en puerta 1 (de forma análoga se haría entrando por la puerta 2) se tiene:



Nótese que los Wilkinson (red A) están equilibrados (igual señal por las puertas 2 y 3; véase el apartado anterior) por lo que se comportan como circuitos sin pérdidas (físicamente es porque no circula corriente por las resistencias). Nótese igualmente que el Wilkinson que actúa como combinador en cada caso no produce ninguna reflexión a la entrada de sus ramas dado que éstas presentan una carga de Z_0 . Por tanto, la reflexión en el amplificador (red B) es tan sólo el parámetro S_{ii} de éste.

De todo ello, se deduce que la matriz de parámetros S del circuito completo es:

$$[S] = -[S^B] = - \begin{bmatrix} 0.5j & 0 \\ 4 & 0.5j \end{bmatrix} \quad (5)$$

Nótese que en este caso concreto es un amplificador unilateral por lo que tenemos que el $S_{12}^B = 0$ y, por tanto, el S_{12} del circuito completo.

Es fácil concluir de lo anterior que el circuito completo es un amplificador. En concreto, es un amplificador balanceado. El circuito de la figura presenta la misma ganancia que cada uno de los amplificadores (matriz $[S^B]$) que lo forman; sin embargo, presentan grandes ventajas entre las que destacan la capacidad de potencia de salida que es el doble de la de cada uno de los amplificadores por separado y la redundancia que supone tener dos amplificadores en vez de uno en caso de fallo de uno de ellos. Por ello, el circuito amplificador del tipo de la figura se puede emplear en las etapas de salida de cadenas transmisoras de microondas.

- c) Al añadir las líneas de $\lambda/4$ hacemos que las ondas en las puertas de los Wilkinson estén en contrafase (excitación impar como combinador; véase el primer apartado) por lo que son disipadas por completo en las resistencias y no aparecen en la puerta 1 del/los Wilkinson. Es decir, el circuito completo está adaptado en sus dos puertas. Por otro lado, se produce un desfase adicional de $\pi/2$, j , en la transmisión.

De este modo, la matriz de parámetros S del circuito completo es en este caso:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4j & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nótese que hay otra posibilidad que es igualmente válida para obtener la matriz de parámetros S de (6): añadir tramos de línea entre el divisor y el amplificador de la rama inferior y el amplificador de la rama superior y el combinador.

9. Considere la siguiente matriz de parámetros de dispersión de una unión (circuito) de microondas de tres puertos.

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- a) ¿Se trata de una red recíproca? ¿Sin pérdidas? ¿Pasiva? Justifique las respuestas.
- b) Considere de nuevo la red de la cuestión anterior, cargada en todos sus puertos con la impedancia de referencia Z_0 . Suponiendo una potencia incidente de 1 mW en el puerto 1, exprese en dBm los valores de las potencias salientes en todos los puertos.
- c) Considere otra vez la red anterior con las mismas condiciones de carga. Suponga que se excita el puerto 2 con una onda incidente a_2 de potencia 1 mW y el puerto 3 con otra onda $a_3 = 2a_2$. Calcular la potencia que fluye desde el puerto 1 (en dBm)

Respuesta:

- a) La respuestas son:

- La matriz de parámetros S es simétrica ($[S] = [S]^T$), por lo que la red es recíproca.
- La matriz de parámetros S es unitaria ($[S]^H[S] = [S][S]^H = [I]$), por lo que la red es sin pérdidas. $[I]$ denota la matriz identidad.
- Dado que es una red sin pérdidas, será necesariamente pasiva (red sin pérdidas es un caso particular de red pasiva)

- b) Las excitaciones en cada puerto son $a_1, a_2 = 0, a_3 = 0$, siendo $|a_1|^2 = 1$ mW. Sean b_1, b_2 y b_3 las ondas salientes por cada puerto. Sus módulos al cuadrado son las potencias salientes.

La obtención de las ondas salientes b_i se hace aplicando la definición de parámetros S . En nuestro caso:

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que da lugar a:

- $b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + s_{13}a_3 = 0$
 $P_1 = |b_1|^2 = 0 \rightarrow 10 \log(0) = -\infty \text{ dBm}$
- $b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2 + s_{23}a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_1$
 $P_2 = |b_2|^2 = \frac{1}{2}|a_1|^2 = 0.5 \text{ mW} \rightarrow 10 \log(0.5) = -3 \text{ dBm}$
- $b_3 = s_{31}a_1 + s_{32}a_2 + s_{33}a_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}a_1$
 $P_3 = |b_3|^2 = \frac{1}{2}|a_1|^2 = 0.5 \text{ mW} \rightarrow 10 \log(0.5) = -3 \text{ dBm}$

Nótese que, como la red es sin pérdidas, la potencia de entrada se reparte entre las salidas.

- c) Las excitaciones en cada puerto son $a_1 = 0$, $a_2, a_3 = 2a_2$, siendo $|a_2|^2 = 1 \text{ mW}$. La potencia saliente por el puerto 1 es el cuadrado del módulo de la onda saliente b_1 :

$$b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + s_{13}a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}2a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}a_2$$

$$P_1 = |b_1|^2 = \frac{1}{2}|a_2|^2 = 0.5 \text{ mW} \rightarrow 10 \log(0.5) = -3 \text{ dBm}$$

El resto de la potencia se refleja en los puertos 2 y 3, que están desadaptados ($s_{22} = s_{33} \neq 0$).

10. Considere un circuito (unión) de 3 accesos/puertas del que se conoce sus matriz de parámetros S referidos a la impedancia de referencia Z_0 , $[S(Z_0)]$:

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{j}{2} & -\frac{j\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{j}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{j\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- a) ¿Se trata de una red recíproca? ¿Sin pérdidas? Justifique las respuestas.
- b) Indique (con un dibujo) una posible realización de dicha unión en tecnología *microstrip*.
 NOTA: No es necesario especificar valores numéricos de dimensiones, impedancias, etc. Sin embargo, el dibujo debe mostrar unas ciertas proporciones relativas.
- c) Considere la unión cargada en su puerta 2 con un tramo de línea de transmisión con pérdidas ($\alpha = 0.1 \text{ Np/cm}$) de longitud $l = \lambda/2$ e impedancia característica Z_1 , terminado en una carga $Z_L = Z_2 \neq Z_1$. Los otros puertos se cargan con la impedancia de referencia Z_0 . Véase la Figura 1.

Calcule la potencia disipada en la carga $Z_L = Z_2$ para el caso particular de $Z_1 = 2Z_0$, $Z_2 = 3Z_0$ y potencia incidente de 1 W en la puerta 1. Considere una frecuencia de 1 GHz y $\lambda = \lambda_0$ en la línea (λ_0 denota la longitud de onda en el vacío).

Obtenga el resultado en función de coeficientes genéricos S_{ji} de la matriz de parámetros S de la unión. Se recomienda que obtenga el valor de la onda de potencia en la puerta 2, b_2 , en función de los datos y los S_{ji} del circuito. A partir de b_2 obtenga el valor de la potencia disipada en la carga $Z_L = Z_2$.

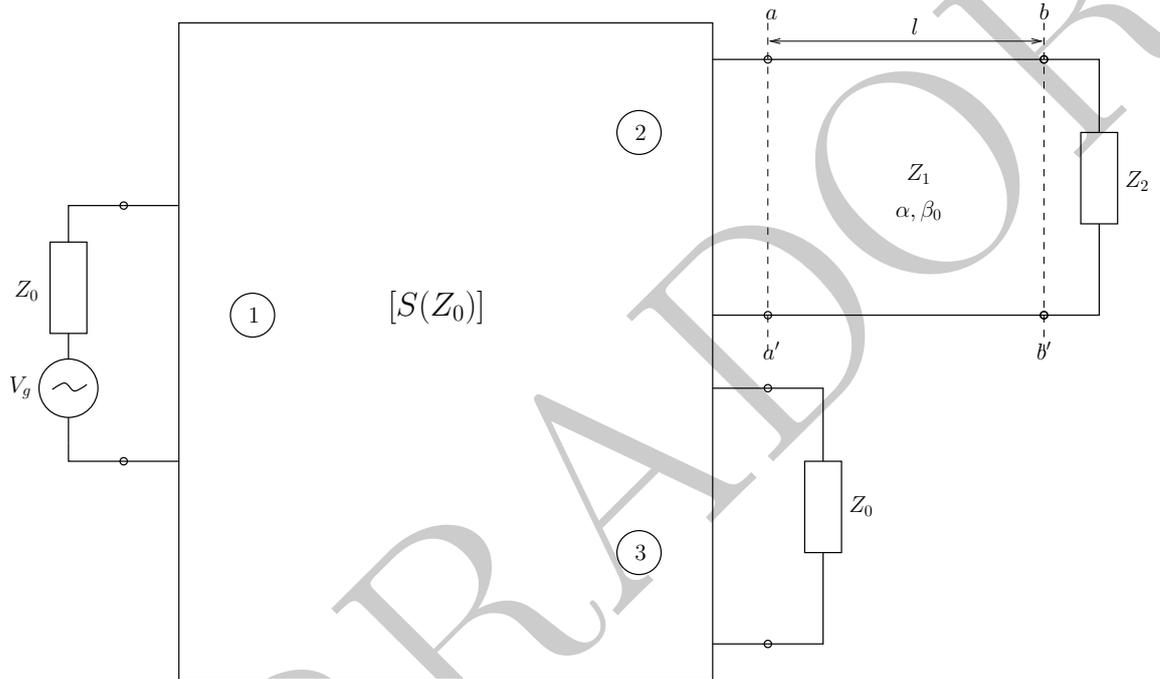


Figura 1.

Respuesta:

- Se trata de un circuito recíproco dada la simetría de la matriz de parámetros S : $S_{ji} = S_{ij}$, $\forall i, j, (i \neq j)$. Se trata de un circuito sin pérdidas dado que $[S(Z_0)]$ es una matriz unitaria, es decir, satisface $S^H S = I$; siendo I la matriz identidad y el super-índice H empleado para denotar la matriz hermítica (transpuesta-conjugada) de una dada.
- Una posible realización es la que se muestra en la Figura 1. Nótese que las anchuras de los dos “brazos” del divisor no son iguales dado que se tiene que $S_{21} \neq S_{31}$. Nótese igualmente que no existe ninguna resistencia en el circuito dado que la matriz $[S(Z_0)]$ corresponde a un circuito sin pérdidas (véase el apartado a).

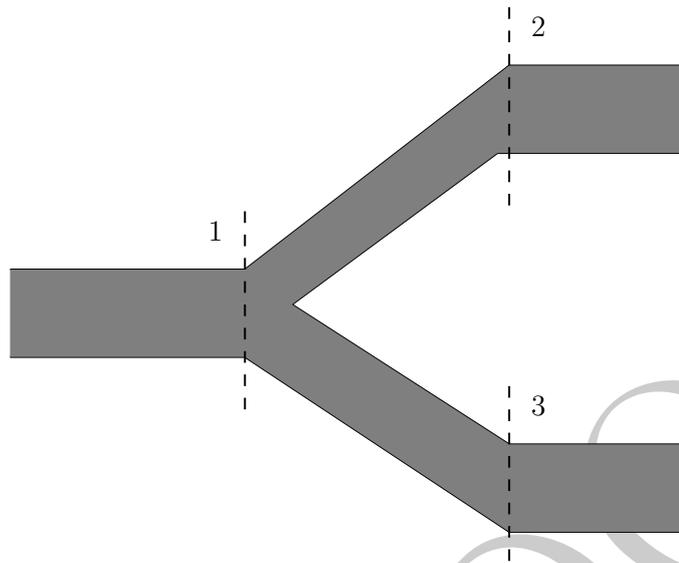


Figura 2. Posible realización del circuito en *microstrip*

Obviamente existen otras realizaciones que pueden dar lugar a la matriz $[S(Z_0)]$ del enunciado. Por ejemplo, un circuito *brach-line* cargado en una de sus puertas con la impedancia Z_0 es otra posible realización.

- c) En este apartado se pregunta cual es la potencia entregada a una carga situada en el extremo de una línea de transmisión a la salida de un acceso de un circuito del que se conocen los parámetros S .

El detalle del problema a resolver en este apartado se muestra en la Figura 3. Nótese que a la izquierda del plano aa' se tienen las ondas de potencia a_2, b_2 , que están referidas a la impedancia Z_0 . A la derecha del plano aa' , se tienen “potencias” asociadas a ondas (progresiva y regresiva) en la línea de transmisión de impedancia característica Z_1 . Por tanto, son ondas referidas a la impedancia Z_1 . Se trata, si se quiere ver así, de un problema de líneas de transmisión con cambio de impedancia característica donde la potencia incidente (a la izquierda de aa') es $|b_2|^2$.

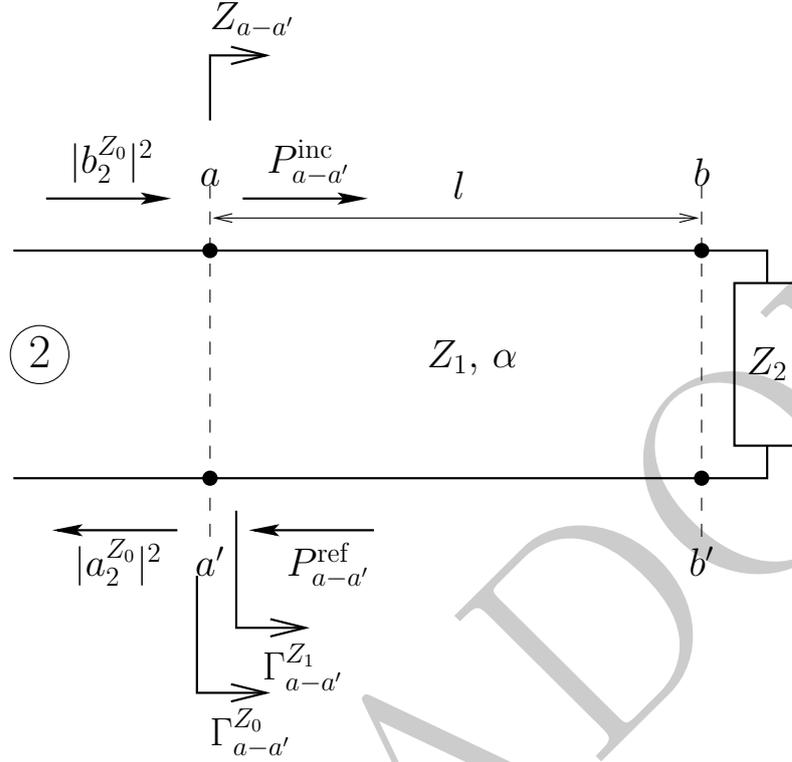


Figura 3

El valor de b_2 se obtiene directamente de las relaciones lineales entre ondas de potencia dictadas por los coeficientes S_{ji} :

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 = S_{21}a_1 + S_{22}\Gamma_{a-a'}^{Z_0}b_2$$

donde el super índice Z_0 en $\Gamma_{a-a'}^{Z_0}$ hace referencia a que el coeficiente de reflexión está referido a la impedancia Z_0 . Nótese que $b_2 \neq S_{21}a_1$.

Despejando b_2 en la expresión anterior se obtiene:

$$b_2 = \frac{S_{21}a_1}{1 - S_{22}\Gamma_{a-a'}^{Z_0}}$$

La expresión de $|b_2|^2$ es por tanto:

$$|b_2|^2 = \frac{|S_{21}|^2|a_1|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_{a-a'}^{Z_0}|^2} \quad (1)$$

donde $|a_1|^2 = 1, W$ por ser $|a_1|^2$ la potencia incidente en la puerta 1 (el dato se da en el enunciado del apartado).

El coeficiente de reflexión $\Gamma_{a-a'}^{Z_0}$ se calcula de la siguiente forma:

$$\Gamma_{a-a'}^{Z_0} = \frac{Z_{a-a'} - Z_0}{Z_{a-a'} + Z_0}$$

donde

$$Z_{a-a'} = Z_1 \frac{1 + \Gamma_{a-a'}^{Z_1}}{1 - \Gamma_{a-a'}^{Z_1}}$$

$$\Gamma_{a-a'}^{Z_1} = \Gamma_{b-b'}^{Z_1} e^{-2\alpha l} e^{-2\beta_0 l} = \Gamma_{b-b'}^{Z_1} e^{-2\alpha l}$$

$$\Gamma_{b-b'}^{Z_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{3Z_0 - 2Z_0}{3Z_0 + 2Z_0} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Nótese que, aunque la línea es eléctricamente $\lambda/2$, la impedancia $Z_{a-a'} \neq Z_{b-b'}$. Ello es debido a la existencia de pérdidas en la línea que hacen que el módulo del coeficiente de reflexión disminuya. De hecho, las pérdidas de la línea en el caso del enunciado son considerables ($2\alpha l = 3$) dado que $l = c_0/(2f) = 15$ cm. Ello hace que:

$$\Gamma_{a-a'}^{Z_1} \approx 0, \quad \rightarrow \quad Z_{a-a'} \approx Z_1, \quad \rightarrow \quad \Gamma_{a-a'}^{Z_0} \approx \frac{1}{3}$$

es decir, $Z_{a-a'} \approx 2Z_0$. Los resultados numéricos concretos se muestran al final del apartado.

Una vez se tiene el valor de $|b_2|$, se trata de resolver un problema de líneas de transmisión. Lo más importante es darse cuenta que, dado el cambio de impedancia de referencia de las ondas de potencia en juego a la derecha e izquierda del plano $a - a'$, se tiene:

$$|b_2^{Z_0}|^2 \neq P_{a-a}^{\text{inc}}, \quad |a_2^{Z_0}|^2 \neq P_{a-a}^{\text{ref}}$$

aunque obviamente la potencia transportada (que atraviesa el plano $a - a'$) es la misma, independientemente de las impedancias de referencia a un lado y otro del plano,

$$P_{a-a'}^T = |b_2^{Z_0}|^2 - |a_2^{Z_0}|^2 = P_{a-a}^{\text{inc}} - P_{a-a}^{\text{ref}} \quad (2)$$

Nótese que, una vez se tiene P_{a-a}^{inc} , se puede calcular la potencia disipada (entregada) en la carga, como sigue:

$$P_L \equiv P_{b-b'}^T = P_{a-a}^{\text{inc}} e^{-2\alpha l} (1 - |\Gamma_{b-b'}^{Z_1}|^2) \quad (3)$$

Es importante resaltar que P_{a-a}^{inc} es la potencia de la onda incidente, pero ya en la línea de transmisión, es decir, referida a Z_1 . Esta puede calcularse a partir de (2), dado que:

$$P_{a-a'}^T = |b_2^{Z_0}|^2 - |a_2^{Z_0}|^2 = |b_2^{Z_0}|^2 (1 - |\Gamma_{a-a'}^{Z_0}|^2)$$

$$P_{a-a'}^T = P_{a-a}^{\text{inc}} - P_{a-a}^{\text{ref}} = P_{a-a}^{\text{inc}} (1 - |\Gamma_{a-a'}^{Z_1}|^2)$$

con lo que podemos despejar P_{a-a}^{inc} :

$$P_{a-a}^{\text{inc}} = \frac{|b_2^{Z_0}|^2 (1 - |\Gamma_{a-a'}^{Z_0}|^2)}{(1 - |\Gamma_{a-a'}^{Z_1}|^2)} \quad (4)$$

y sustituir el resultado en (3) para obtener la expresión final de la potencia disipada en la carga:

$$P_L \equiv P_{b-b'}^T = \frac{|b_2^{Z_0}|^2 (1 - |\Gamma_{a-a'}^{Z_0}|^2)}{(1 - |\Gamma_{a-a'}^{Z_1}|^2)} e^{-2\alpha l} (1 - |\Gamma_{b-b'}^{Z_1}|^2) \quad (5)$$

Los valores numéricos se muestran a continuación. Los coeficientes de reflexión son los siguientes

$$\Gamma_{b-b'}^{Z_1} = 0.2, \quad \Gamma_{a-a'}^{Z_1} = 9.96 \cdot 10^{-3}, \quad Z_{a-a'} = 2.04 Z_0, \quad \Gamma_{a-a'}^{Z_0} = 0.34,$$

lo que lleva al valor de $|b_2|^2$ (véase (1)),

$$|b_2|^2 = 0.45 \text{ W.}$$

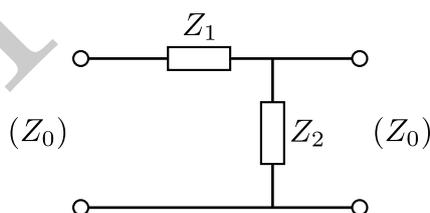
A partir de los valores anteriores se obtiene P_{a-a}^{inc} (véase (4))

$$P_{a-a}^{\text{inc}} = 0.40 \text{ W}$$

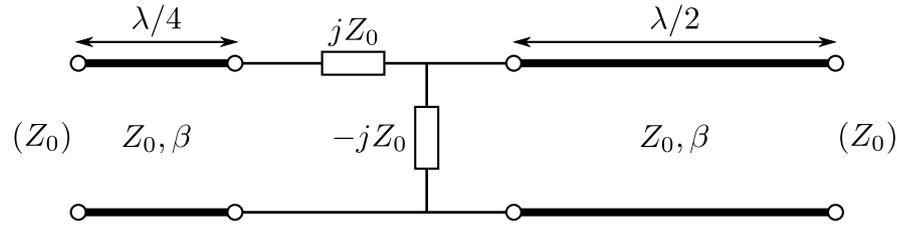
y finalmente P_L (véase (5)):

$$P_L \equiv P_{b-b'}^T = 0.02 \text{ W} = 20 \text{ mW}$$

11. Considere la siguiente red formada por dos impedancias Z_1 y Z_2 .



- ¿Es recíproca? ¿Cuántos parámetros S diferentes son necesarios para describir por completo la red? Justifique sus respuestas.
- Calcule la matriz de parámetros S completa de la red. Considere la misma impedancia de referencia real Z_0 para ambos puertos.
- Calcule ahora la matriz de parámetros S de la red siguiente:

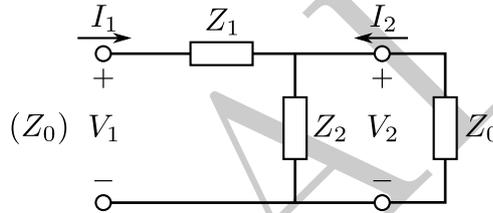


Si no ha respondido a la pregunta anterior considere una matriz de scattering genérica para la subred formada por las dos impedancias.

d) Esta segunda red, ¿tiene pérdidas? Demuéstrelo utilizando la matriz $[S]$.

Respuesta:

- La red es recíproca (es decir, $S_{12} = S_{21}$) pero no es simétrica ($S_{11} \neq S_{22}$). Por tanto hacen falta tres parámetros de scattering para que la red quede bien definida, S_{11} , S_{12} y S_{22} .
- Cargando el puerto 2 con la impedancia de referencia Z_0 , se obtiene la red siguiente:



La impedancia de entrada en el puerto 1, Z_{in1} , es por tanto

$$Z_{in1} = Z_1 + (Z_2 \parallel Z_0) = \frac{Z_0 Z_1 + Z_0 Z_2 + Z_1 Z_2}{Z_0 + Z_2}$$

Y por definición S_{11} es el coeficiente de reflexión en el puerto 1 respecto a Z_0 (ya que el puerto 2 está cargado con Z_0), es decir

$$S_{11} = \frac{Z_{in1} - Z_0}{Z_{in1} + Z_0} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_0 Z_1 - Z_0^2}{Z_1 Z_2 + Z_0 Z_1 + 2Z_0 Z_2 + Z_0^2}$$

Por otra parte, como $V_2 = -I_2 Z_0$, S_{21} resulta

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{V_2 - Z_0 I_2}{\frac{V_1 + Z_0 I_1}{\sqrt{8Z_0}}} = \frac{2V_2}{V_1 + Z_0 I_1}$$

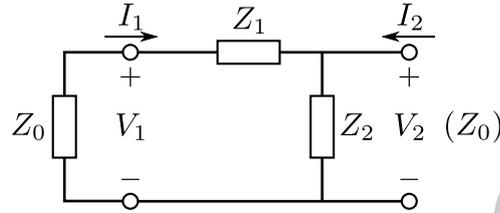
Ahora bien, analizando la red se tiene

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{in1} I_1 \\ V_2 &= V_1 - Z_1 I_1 = (Z_{in1} - Z_1) I_1. \end{aligned}$$

Y por tanto

$$S_{21} = \frac{2(Z_{in1} - Z_1)I_1}{Z_{in1}I_1 + Z_0I_1} = \frac{2(Z_{in1} - Z_1)}{Z_{in1} + Z_0} = \frac{2Z_0Z_2}{Z_1Z_2 + Z_0Z_1 + 2Z_0Z_2 + Z_0^2}$$

La otra configuración de la red es con el puerto 2 cargado con Z_0 ,



Ahora la impedancia de entrada en el puerto 2 es la siguiente

$$Z_{in2} = Z_2 \parallel (Z_0 + Z_1) = \frac{Z_2(Z_0 + Z_1)}{Z_0 + Z_1 + Z_2}$$

El coeficiente de reflexión de esa impedancia respecto a Z_0 es S_{22} ,

$$S_{22} = \frac{Z_{in2} - Z_0}{Z_{in2} + Z_0} = \frac{Z_1Z_2 - Z_0Z_1 - Z_0^2}{Z_1Z_2 + Z_0Z_1 + 2Z_0Z_2 + Z_0^2}$$

y no es necesario calcular S_{12} ya que la red es recíproca y $S_{12} = S_{21}$.

- c) Sustituyendo $Z_1 = jZ_0$ y $Z_2 = -jZ_0$ en el resultado anterior se obtienen los parámetros de scattering del subcircuito interior de esta segunda red,

$$S_{11} = \frac{jZ_0^2}{(2-j)Z_0^2} = \frac{j}{2-j} = \frac{-1+2j}{5}$$

$$S_{22} = \frac{-jZ_0^2}{(2-j)Z_0^2} = \frac{-j}{2-j} = \frac{1-2j}{5}$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{-2jZ_0^2}{(2-j)Z_0^2} = \frac{-2j}{2-j} = \frac{2-4j}{5}$$

$$[S'] = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1+2j & 2-4j \\ 2-4j & 1-2j \end{bmatrix}$$

Los tramos de línea de transmisión suponen un cambio del plano de referencia de cada puerto, siendo la matriz de cambio

$$\begin{bmatrix} e^{-j\beta\frac{\lambda}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta\frac{\lambda}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-j\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por último, la matriz de scattering S de la red completa es

$$[S] = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} [S'] \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 - 2j & 4 + 2j \\ 4 + 2j & 1 - 2j \end{bmatrix}$$

Nótese que el cambio de planos de referencia corresponde sencillamente a:

$$S_{11} = S'_{11} e^{-2j\beta\frac{\lambda}{4}} = -S'_{11}$$

$$S_{22} = S'_{22} e^{-2j\beta\frac{\lambda}{2}} = S'_{22}$$

$$S_{21}(= S_{12}) = S'_{21} e^{-j\beta(\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2})} = jS'_{21}$$

- d) Obsérvese que S corresponde a una red eléctricamente simétrica, ya que $S_{11} = S_{22}$, aunque físicamente no lo sea. Por tanto, sólo hace falta verificar dos condiciones para demostrar que la red no tiene pérdidas.

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = \left| \frac{1 - 2j}{5} \right|^2 + \left| \frac{4 + 2j}{5} \right|^2 = \frac{5 + 20}{25} = 1$$

$$S_{11}^* S_{21} + S_{21}^* S_{11} = \frac{(1 + 2j)(4 + 2j) + (1 - 2j)(4 - 2j)}{25} = \frac{10j - 10j}{25} = 0$$

Por otra parte es trivial ver que la red no tiene pérdidas: está formada únicamente por reactancias y tramos de línea de transmisión sin atenuación.

12. Demostrar que para una red sin pérdidas de 2 puertos se cumple:

- $|S_{11}| = |S_{22}|$
- $|S_{21}| = |S_{12}|$

Respuesta:

Como se vió en teoría, una red sin pérdidas se caracteriza por

$$S^H S = I \quad (1)$$

donde el superíndice H se refiere a la matriz hermítica (transpuesta y conjugada) y I se refiere a la matriz identidad.

En el caso de redes de 2 puertas, la expresión (1) corresponde a:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (2)$$

$$S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} = 0 \quad (3)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \quad (4)$$

Nótese que las ecuaciones anteriores corresponden al producto de la primera columna de la matriz S conjugada por ella misma, la segunda al producto de la primera conjugada por la segunda, y la tercera al producto de la segunda columna conjugada por ella misma. Nótese igualmente que el producto de la segunda columna conjugada por la primera es el complejo de (3) y, dado que esta igualada a cero, es la misma ecuación.

Si se considera el módulo al cuadrado de (3), se tiene:

$$|S_{11}|^2 |S_{12}|^2 = |S_{21}|^2 |S_{22}|^2 \quad (5)$$

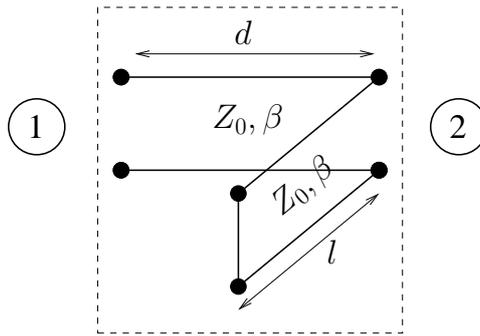
que, combinada con (2) y (4), da lugar a

$$|S_{11}|^2 (1 - |S_{22}|^2) = (1 - |S_{11}|^2) |S_{22}|^2 \quad (6)$$

de la que se obtiene $|S_{11}|^2 = |S_{22}|^2$ y, por tanto, $|S_{11}| = |S_{22}|$.

Igualmente, se puede ver que se cumple también que $|S_{12}| = |S_{21}|$. No hay más que sustituir $|S_{11}| = |S_{22}|$ en (2) y (4).

13. Considere la red adaptadora de la figura formada por una sección de línea de transmisión y una sección terminada en cortocircuito cargando en paralelo a la primera, es decir, una red de tipo *simple stub*.



Obtenga los parámetros S (respecto a Z_0) de la red en función de las distancias d, l .

Respuesta:

El circuito *simple stub* es un caso particular del circuito de la figura 2 (con $d_1 = d, d_2 = 0$)³. Nótese que el circuito consta de una admitancia paralelo; las líneas de Z_0 corresponden sencillamente a un cambio de plano de referencia para el cálculo de los parámetros $S(Z_0)$.

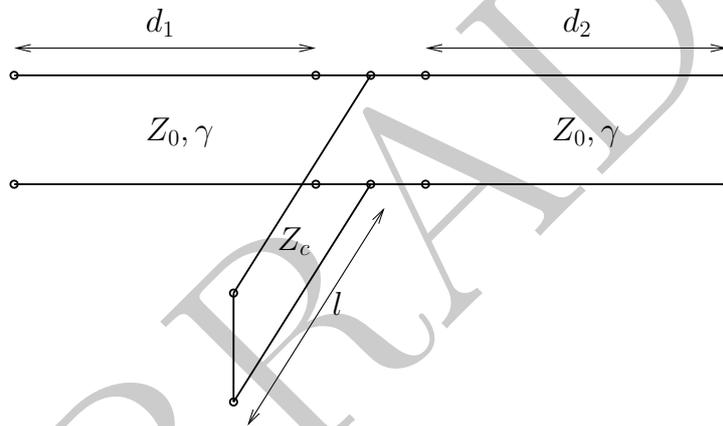


Figura 2

Por tanto, el cálculo de $[S(Z_0)]$ del circuito *simple stub* implica el cálculo de $[S(Z_0)]$ del circuito de la Figura 3.

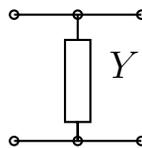


Figura 3

³El análisis del circuito de la figura 2 puede verse en `t_paramS_stub-en-corto`.

Dicho cálculo se encuentra detallado en `t_paramS_stub-en-corto`. El resultado es:

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} \frac{-\bar{Y}}{\bar{Y} + 2} & \frac{2}{\bar{Y} + 2} \\ \frac{2}{\bar{Y} + 2} & \frac{-\bar{Y}}{\bar{Y} + 2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

El valor de la impedancia característica del *stub* es $Z_c = Z_0$. De este modo, el valor de la admitancia (normalizada Z_0) del *stub*, $\bar{Y} = jb_s$, es:

$$\bar{Y} = jb_s = -j \cot(\beta l) \quad (2)$$

Nótese que Y es imaginaria pura.

Finalmente, sustituyendo (2) en (1), y teniendo en cuenta el cambio de plano de referencia (distancia d) en el puerto 1, se obtiene:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{j \cot(\beta l)}{-j \cot(\beta l) + 2} e^{-2j\beta d} \\ S_{22} &= \frac{j \cot(\beta l)}{-j \cot(\beta l) + 2} \\ S_{21} = S_{12} &= \frac{2}{-j \cot(\beta l) + 2} e^{-j\beta d} \end{aligned}$$

14. Considere la adaptación, mediante una red recíproca y sin pérdidas (red no disipativa), de una impedancia real $Z_L = 100 \Omega$ a $Z_0 = 50 \Omega$.

Responda a las siguientes preguntas:

- Obtenga la forma de la matriz de parámetros S (respecto a Z_0) de las posibles redes de adaptación que que pudieran implementarse y que cumplan los requisitos del enunciado.
- Particularice el proceso del apartado anterior al caso específico de red simétrica.
- Indique (con un esquema) una posible realización de red (en base a tramos/secciones de línea de transmisión) que cumpla las condiciones del enunciado para los casos de:
 - red de adaptación no simétrica
 - red de adaptación simétrica

Respuesta:

a) El hecho de ser una red recíproca y sin pérdidas permite escribir:

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde se cumple que $[S]^H[S] = [I]$ siendo $[I]$ la matriz identidad, es decir,

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (2)$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \quad (3)$$

$$S_{11}^* S_{21} + S_{21}^* S_{22} = 0 \quad (4)$$

De las relaciones de módulos (1), (3), se infiere⁴ que:

$$|S_{11}| = |S_{22}| = \sqrt{1 - |S_{21}|^2} \quad (5)$$

La relación de fases entre los parámetros S que implica el hecho de que la red sea sin pérdidas se obtiene de (2), que puede expresarse de la forma

$$\frac{S_{11}^*}{S_{22}} = -\frac{S_{21}^*}{S_{21}} \Rightarrow \varphi_{11} + \varphi_{22} = 2\varphi_{21} \pm \pi \quad (6)$$

siendo φ_{ij} la fase de S_{ij} .

El otro dato que se da sobre la red es que adapta $Z_L = 100 \Omega$ a $Z_0 = 50 \Omega$. Además, debido a que la red es sin pérdidas necesariamente adaptará a $Z_0 = 50 \Omega$ a $Z_L = 100 \Omega$, dado que la adaptación conjugada (en concreto, el factor de adaptación de impedancias M) se mantiene al pasar de un plano al otro de una red sin pérdidas. De este modo, las impedancias vistas con condiciones de carga de Z_L en una puerta (por ejemplo, la puerta 1) y Z_0 en la otra son las de la figura 1.



Figura 1

En concreto, el coeficiente de reflexión en el puerto 1, Γ_{IN} , cuando se carga el puerto 2 con Z_0 , es $\Gamma_{IN} = (Z_L - Z_0)/(Z_L + Z_0) = 1/3$. Pero precisamente, ésta es la definición de S_{11} , por lo que concluimos que $S_{11} = 1/3$. De este modo, (4) pasa a ser:

$$\varphi_{22} = 2\varphi_{21} \pm \pi \quad (7)$$

⁴La propiedad de que $|S_{11}| = |S_{22}|$ en el caso de una red de dos puertas sin pérdidas también se mantiene aún en el caso de que la red no sea recíproca. Ver `t_paramS_S11=S22_S21=S12`

Por tanto, podemos escribir la matriz $[S(Z_0)]$ de la forma:

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{j\varphi_{21}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{j\varphi_{21}} & \frac{1}{3} e^{j\varphi_{22}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde debe satisfacerse (7).

La expresión anterior constituye la respuesta del apartado. Sin embargo, es ilustrativo comprobar como una red con una matriz $[S]$ que se ajuste a (8) (con (7)), efectivamente adapta de $100\ \Omega$ a $50\ \Omega$ y de $50\ \Omega$ a $100\ \Omega$. Lo segundo es obvio dado que $S_{11} = 1/3$. Lo primero se comprueba calculando el coeficiente de reflexión en el puerto 2, Γ_{OUT} , cuando se carga el puerto 1 con $Z_L = 100\ \Omega$ (que corresponde a $\Gamma_G = 1/3$):

$$\Gamma_{\text{OUT}} = S_{22} + \frac{S_{21}^2 \Gamma_G}{1 - S_{11} \Gamma_G} = \frac{1}{3} e^{j\varphi_{22}} + \frac{\frac{8}{9} \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} e^{2j\varphi_{21}} = \frac{1}{3} e^{j\varphi_{22}} + \frac{1}{3} e^{2j\varphi_{21}} = 0 \quad (9)$$

en donde se ha utilizado (7), es decir, que S_{22} y S_{21}^2 están en contrafase.

- b) Si además de las condiciones del apartado (a), se añade la condición de simetría de la red, es decir que $S_{11} = S_{22}$, se tiene $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$ por lo que (7) se simplifica más aún y pasa a ser:

$$0 = 2\varphi_{21} \pm \pi \Rightarrow \varphi_{21} = \pm \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

De este modo, la matriz $[S(Z_0)]$ de la red adaptadora simétrica sólo puede ser de las dos formas siguientes:

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -j\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -j\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}; \quad [S(Z_0)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & j\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ j\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matriz $[S(Z_0)]$ de la izquierda de (11) corresponde a un transformador $\lambda/4$ (figura 2.a). La demostración puede verse en `p_matrix_s_lambda_cuartos`. De forma análoga, se concluye que la matriz $[S(Z_0)]$ de la derecha de (11) corresponde a un transformador $3\lambda/4$ (figura 2.b).

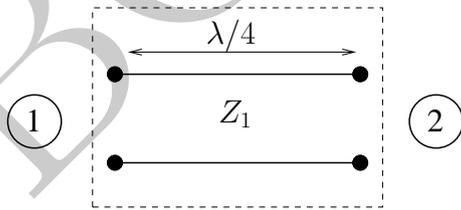


Figura 2.a: Transformador $\lambda/4$

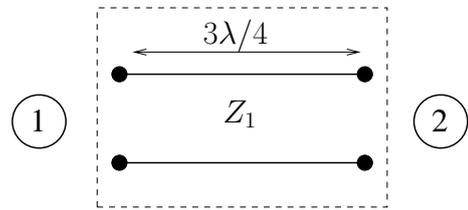


Figura 2.b: Transformador $3\lambda/4$

c) La respuesta a este apartado para el caso de red simétrica ya se ha respondido en el apartado b: cualquiera de las redes de la figura 2 constituye una posible realización.

Una posible realización de red de adaptación no simétrica es la de la figura 3: una red *simple stub*.

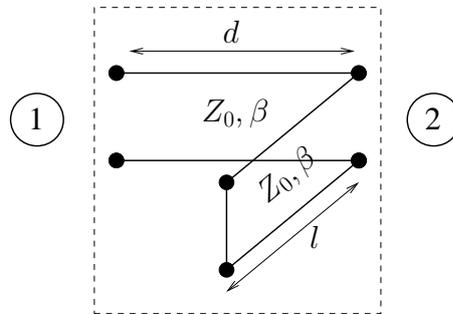


Figura 3: Red *simple stub* paralelo con stubs en cortocircito

Como es sabido, existen dos soluciones de d, l . Estas son:

$$\text{Sol. 1: } d_1 = 0.348 \lambda \quad l_1 = 0.348 \lambda \quad (12)$$

$$\text{Sol. 2: } d_2 = 0.152 \lambda \quad l_2 = 0.152 \lambda \quad (13)$$

Aunque no se pide en el enunciado, es ilustrativo calcular los parámetros S de la red *simple stub* (véase el procedimiento en `p_S_simple_stub`). Las matrices $S[(Z_0)]$ para cada una de las dos soluciones son las siguientes (la matriz de (14) corresponde a la solución 1 y la matriz de (15) a la solución 2):

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \angle -144.74^\circ \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \angle -144.74^\circ & \frac{1}{3} \angle -109.48^\circ \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \angle -35.26^\circ \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \angle -35.26^\circ & \frac{1}{3} \angle 109.48^\circ \end{bmatrix} \quad (15)$$

que cumplen la forma de (8) (satisfaciendo la igualdad (7)).

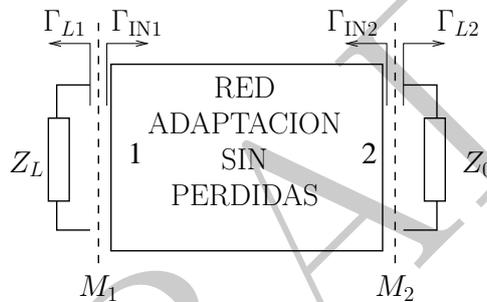
15. Considere la red adaptadora sin pérdidas de la figura con $Z_L = 2 Z_0$ (Z_0 real).



Indique el valor de $S_{11}(Z_0)$ de la red adaptadora. Justifique la respuesta.

Respuesta:

Si cargamos la red en su puerto 2 con $Z_0^* = Z_0$, se tiene una situación como la de la figura donde $\Gamma_{L2} = 0$, $\Gamma_{IN2} = 0$.



Por tanto, se cumple $\Gamma_{L2} = \Gamma_{IN2}^*$, es decir, existe adaptación conjugada en el plano 1, por lo que el factor de adaptación de impedancias M es nulo en dicho plano: $M_1 = 0$.

Dado que la red es sin pérdidas, necesariamente se debe cumplir $M_1 = M_2$ y, en particular, que si existe adaptación conjugada en un plano (por ejemplo, el puerto 1, $M_1 = 1$) lo hay en el otro plano (puerto 2, $M_2 = 1$).

Habiendo concluido que $M_2 = 1$ se infiere que $\Gamma_{IN1} = \Gamma_{L1}^*$.

El coeficiente $S_{11}(Z_0)$ corresponde al coeficiente de reflexión en el puerto 1 (referido a Z_0) cuando se carga el puerto 2 con Z_0 . Es decir, $S_{11}(Z_0) = \Gamma_{IN1}$ en la figura. Por otro lado se ha obtenido que $\Gamma_{IN1} = \Gamma_{L1}^*$.

De este modo, se tiene finalmente:

$$S_{11}(Z_0) = \Gamma_{IN1} = \Gamma_{L1}^* = \frac{Z_L^* - Z_0}{Z_L^* + Z_0} = \frac{2Z_0 - Z_0}{2Z_0 + Z_0} = \frac{1}{3}$$

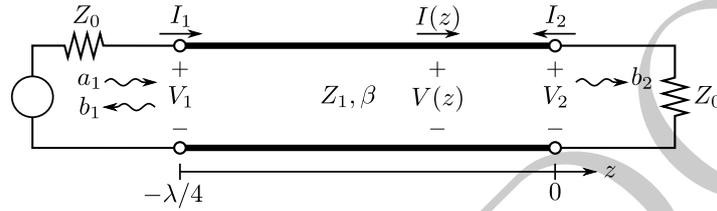
16. Calcular la matriz de parámetros S de un transformador $\lambda/4$ sin pérdidas de impedancia característica Z_1 . Considere la misma impedancia de referencia Z_0 para ambos puertos (en general $Z_0 \neq Z_1$). Compruebase que la matriz obtenida corresponde a una red sin pérdidas.

Respuesta:

La red es físicamente simétrica (y por supuesto recíproca), por lo que $S_{11} = S_{22}$ y $S_{21} = S_{12}$, con lo que sólo es necesario calcular dos parámetros S. Por ejemplo, puede cargarse el puerto 2 con la impedancia de referencia Z_0 , con lo que la onda de potencia a_2 es nula y se tienen las condiciones en las que se definen S_{11} y S_{21} ,

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

Primero se calcularán las tensiones y corrientes de los puertos, para con ellas obtener las ondas de potencia.



Considerando el sentido positivo hacia la carga y con el origen en ésta, la tensión y la corriente en cada punto de la línea de transmisión viene dada por las expresiones

$$V(z) = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z})$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_1} (e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{j\beta z})$$

donde V_0^+ es la amplitud de la onda progresiva (en sentido de generador a carga) en el origen de coordenadas (la carga en este caso), y Γ_L es el coeficiente de reflexión de la carga (Z_0) con respecto a la impedancia característica de la línea (Z_1),

$$\Gamma_L = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1}.$$

Nótese que no hace falta determinar el valor de V_0^+ dado que se cancelará al calcular los parámetros S cuando se comparen ondas de potencia.

Tomando $z = 0$ se obtiene la tensión y la corriente en la carga,

$$V_2 = V(0) = V_0^+ (1 + \Gamma_L)$$

$$I_2 = -I(0) = -\frac{V_0^+}{Z_1} (1 - \Gamma_L).$$

Por su parte, con $z = -\lambda/4$ se obtiene la tensión y la corriente a la entrada de la sección de línea de transmisión,

$$V_1 = V(-\lambda/4) = V_0^+ (e^{j\pi/2} + \Gamma_L e^{-j\pi/2}) = jV_0^+ (1 - \Gamma_L)$$

$$I_1 = I(-\lambda/4) = \frac{V_0^+}{Z_1} (e^{j\pi/2} - \Gamma_L e^{-j\pi/2}) = j\frac{V_0^+}{Z_1} (1 + \Gamma_L)$$

Aplicando directamente su definición, se pueden calcular las ondas de potencia. Téngase en cuenta que $V_2 = -Z_0 I_2$ (o lo que es equivalente, $a_2 = 0$) y que la impedancia de referencia para definir los parámetros S es Z_0 .

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{V_1 + Z_0 I_1}{\sqrt{8Z_0}} = \frac{jV_0^+}{\sqrt{8Z_0}} \left[(1 - \Gamma_L) + \frac{Z_0}{Z_1} (1 + \Gamma_L) \right] \\ b_1 &= \frac{V_1 - Z_0 I_1}{\sqrt{8Z_0}} = \frac{jV_0^+}{\sqrt{8Z_0}} \left[(1 - \Gamma_L) - \frac{Z_0}{Z_1} (1 + \Gamma_L) \right] \\ b_2 &= \frac{V_2 - Z_0 I_2}{\sqrt{8Z_0}} = \frac{2V_2}{\sqrt{8Z_0}} = \frac{2V_0^+}{\sqrt{8Z_0}} (1 + \Gamma_L) \end{aligned}$$

Por otra parte, las expresiones entre paréntesis son

$$1 + \Gamma_L = \frac{2Z_0}{Z_0 + Z_1} \quad 1 - \Gamma_L = \frac{2Z_1}{Z_0 + Z_1}$$

y extrayendo los factores comunes se obtienen las ondas de potencia en función únicamente de las impedancias y de la amplitud arbitraria V_0^+ ,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2jV_0^+}{\sqrt{8Z_0}(Z_0 + Z_1)} \left(Z_1 + \frac{Z_0^2}{Z_1} \right) \\ b_1 &= \frac{2jV_0^+}{\sqrt{8Z_0}(Z_0 + Z_1)} \left(Z_1 - \frac{Z_0^2}{Z_1} \right) \\ b_2 &= \frac{2V_0^+}{\sqrt{8Z_0}(Z_0 + Z_1)} 2Z_0 \end{aligned}$$

Con estos resultados se pueden calcular los parámetros S sin más que sustituir y eliminar el factor común,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{Z_1 - Z_0^2/Z_1}{Z_1 + Z_0^2/Z_1} = \frac{Z_1^2 - Z_0^2}{Z_1^2 + Z_0^2} \\ S_{21} &= \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{2Z_0}{j(Z_1 + Z_0^2/Z_1)} = \frac{-2jZ_0Z_1}{Z_1^2 + Z_0^2} \end{aligned}$$

Puede notarse que S_{11} podría haberse calculado simplemente como el coeficiente de reflexión respecto a Z_0 correspondiente a la impedancia de entrada Z_1^2/Z_0 del transformador $\lambda/4$.

La matriz de parámetros S completa es por tanto

$$[S] = \frac{1}{Z_1^2 + Z_0^2} \begin{bmatrix} Z_1^2 - Z_0^2 & -2jZ_0Z_1 \\ -2jZ_0Z_1 & Z_1^2 - Z_0^2 \end{bmatrix}$$

Para comprobar si la matriz corresponde a una red sin pérdidas hay que calcular el producto matricial $[S]^H[S]$, cuyo resultado ha de ser la matriz unidad. Para ello, puede comprobarse fácilmente que

$$(Z_1^2 - Z_0^2)^2 + (2Z_0Z_1)^2 = (Z_1^2 + Z_0^2)^2$$

sin más que desarrollar cada término. Por tanto

$$[S]^H[S] = \frac{1}{(Z_1^2 + Z_0^2)^2} \begin{bmatrix} Z_1^2 - Z_0^2 & 2jZ_0Z_1 \\ 2jZ_0Z_1 & Z_1^2 - Z_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1^2 - Z_0^2 & -2jZ_0Z_1 \\ -2jZ_0Z_1 & Z_1^2 - Z_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último, y aunque no se pedía en el enunciado, se va a particularizar el resultado para el caso de $Z_1 = \sqrt{2}Z_0$.

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -j\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -j\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Este es un caso que se da con frecuencia en acopladores/divisores/combinadores que consten de (o contengan) uniones en paralelo de tres líneas (línea de Z_0 que se bifurca en dos líneas de $\sqrt{2}Z_0$ y longitud $\lambda/4$). Algunos ejemplos de circuitos que hacen uso de este tipo de unión son el Wilkinson, híbrido *branch-line* de 3dB, el anillo híbrido (o *rat-race*), y divisores/combinadores (1 entrada, 2 salidas) con líneas de transmisión.

Otra forma de calcular la matriz de parámetros S respecto a Z_0 es la siguiente. Se calcula primero la matriz de parámetros S con respecto a Z_1 (la impedancia característica de la línea). De este modo, $[S(Z_1)]$ corresponde a un tramo de línea $\lambda/4$ adaptado, que es trivial de calcular:

$$[S(Z_1)] = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de $[S(Z_1)]$, se obtiene $[S(Z_0)]$ como un cambio de impedancias de referencias. Ello se consigue pasando por la matriz de impedancias $[Z]$ (que no depende de impedancia de referencia alguna) como se indica a continuación:

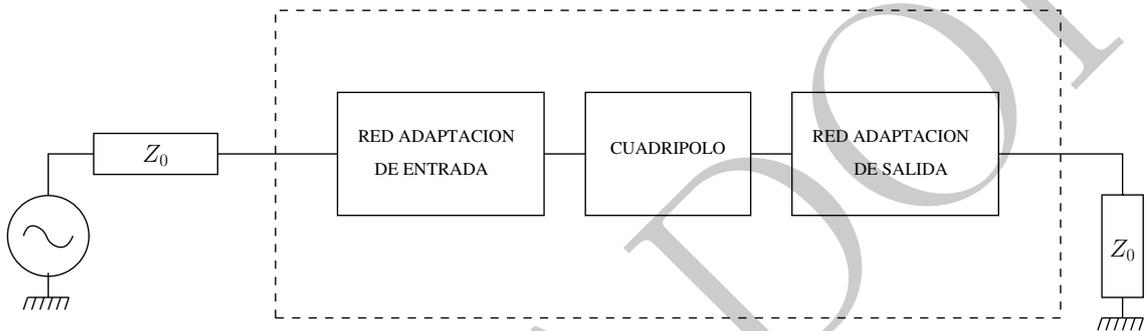
$$[S(Z_1)] = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_1} [Z] = \begin{bmatrix} 0 & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_0} [S(Z_0)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -j\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -j\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

17. Sobre el cuadripolo representado por

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} 0.5j & 0 \\ 4 & 0.5j \end{bmatrix}$$

responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cual es la potencia entregada a una carga $Z_L = Z_0$ situada en el puerto 2 cuando se incide en el puerto 1 con una onda de potencia $a_1 = 2j$?
- b) ¿Se obtiene la máxima potencia en esta situación de carga? ¿Por qué?
- c) En caso que la respuesta anterior sea negativa, razone sobre la posibilidad de obtener la máxima potencia en Z_L mediante el uso de redes “de adaptación” sin pérdidas en entrada y salida conforme al esquema de la Figura. ¿Como diseñaría dichas redes? Es decir, ¿qué impedancias deberían adaptar/sintetizar dichas redes? Dibuje los esquemas de las redes de adaptación de entrada y salida en base a redes de tipo *simple stub* con líneas de impedancia característica Z_0 .



- d) Obtenga los valores que definen la red *simple stub* para el caso de la red de adaptación de salida.

NOTA: Considere una adaptación desde $Z = (0.6 + 0.8j)Z_0$ a Z_0 en el caso de desconocer la carga que debe ver el cuadripolo a su salida para máxima potencia a la carga.

Respuesta:

- a) Dado que $Z_L = Z_0$ se tiene $a_2 = 0$ y, por tanto, $b_2 = S_{21}a_1$ y $P_L = |b_2|^2$. De este modo,

$$P_L = |S_{21}|^2 |a_1|^2 = 64$$

NOTA: En el resultado anterior no se han indicado unidades para la potencia P_L . Obviamente, dado que los parámetros S son adimensionales, las unidades para P_L son las mismas que para $|a_1|^2$. Como no se indican explícitamente en el enunciado las unidades para la potencia $|a_1|^2$ se pueden dejar sin explicitar las unidades, o bien suponer unas determinadas unidades de potencia (por ejemplo, vatios).

- b) No se obtiene la máxima potencia. La máxima potencia se obtiene cuando la carga Z_L elegida hace que existe adaptación conjugada en el puerto de salida (puerto 2) del cuadripolo.

Siguiendo la notación de la Figura 1, Γ^{OUT} es el coeficiente de reflexión visto a la entrada del puerto de salida del cuadripolo que, dado que es unilateral, se tiene $\Gamma^{\text{OUT}} = S_{22} = 0.5j$. De este modo, la adaptación conjugada a la salida del cuadripolo se obtiene cuando $\Gamma_L = (\Gamma^{\text{OUT}})^* = -0.5j$ que, obviamente no corresponde con $Z_L = Z_0$.

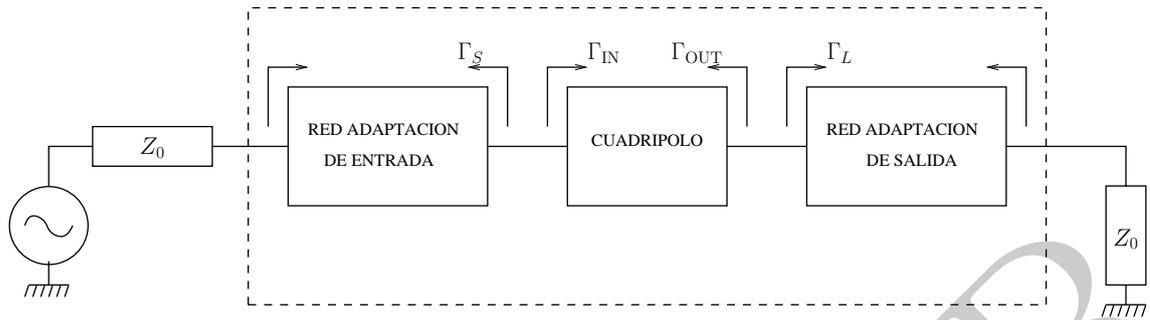


Figura 1: Cuadripolo con Redes de Adaptación. Notación

- c) En base a lo razonado en el apartado anterior es fácil inferir que se puede obtener la máxima potencia intercalando redes que conviertan la impedancia Z_0 en la impedancia que se requiera en cada caso para que exista adaptación conjugada de impedancias.

De este modo, la impedancia vista desde el cuadripolo (hacia fuera del cuadripolo) que se requiere para máxima potencia es:

- Puerto 2: Como ya se explicó en el apartado anterior,

$$\Gamma_L = (\Gamma^{\text{OUT}})^* = -0.5j$$

- Puerto 1: De forma análoga, concluimos que $\Gamma_S = (\Gamma^{\text{IN}})^*$ donde $\Gamma^{\text{IN}} = S_{11}$ por ser el cuadripolo unilateral. Por tanto,

$$\Gamma_S = (\Gamma^{\text{IN}})^* = S_{11}^* = -0.5j$$

El esquema que sirve para diseñar dichas redes se muestra en las Figuras 2 y 3.

Tomando como ejemplo la red de adaptación de entrada observamos que la red debe presentar/sintetizar la impedancia/coeficiente de reflexión que se ha denotado por Z_S, Γ_S desde su puerto 2 cuando se carga con Z_0 su puerto 1. De este modo, se presenta la carga apropiada (Z_S en este caso) al cuadripolo. Nótese que el diseño de dicha red de ese modo (véase la parte izquierda de la Figura 2) conlleva un proceso de movimiento en la Carta de Smith desde el centro de la carta al punto Z_S, Γ_S .

Si se da el caso particular de que la red de adaptación es sin pérdidas (como es nuestro caso) sabemos que, de darse adaptación conjugada en un puerto, necesariamente se da en el otro puerto. Ello permite pensar en la red como aparece en el lado derecho de la figura: una red de adaptación de Z_S^* a Z_0 . Este último diseño sí corresponde con el típico movimiento en la carta de Smith desde un punto de la carta al centro de ésta.

El razonamiento es análogo para la red de salida (véase la Figura 3).

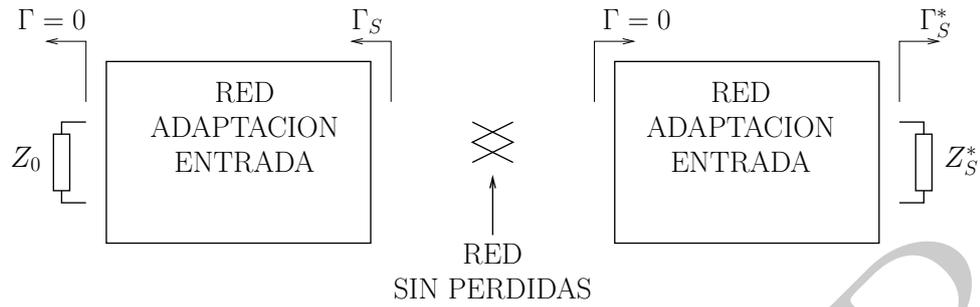


Figura 2: Esquema de Diseño de la Red de Adaptación de Entrada donde $\Gamma_S^* = S_{11} = 0.5j$

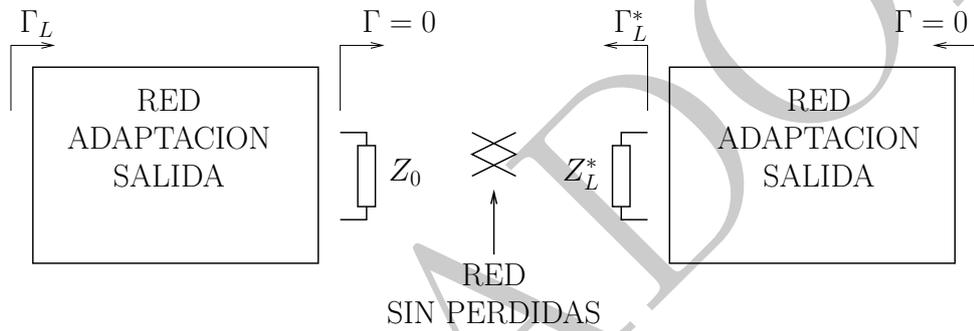


Figura 3: Esquema de Diseño de la Red de Adaptación de Salida donde $\Gamma_L^* = S_{22} = 0.5j$

Entrando ya en una técnica concreta de adaptación (la de *simple stub* con líneas de Z_0 en nuestro caso), observamos que el *simple stub* debe colocarse como se muestra en la Figura 4. Nótese que si se colocara el *simple stub* de la manera contraria (con los *stubs* en extremo de las líneas cercano al cuadripolo, Figura 5) las redes de adaptación no funcionarían correctamente. De hecho, no podrían diseñarse para satisfacer, en el caso general, la adaptación requerida.

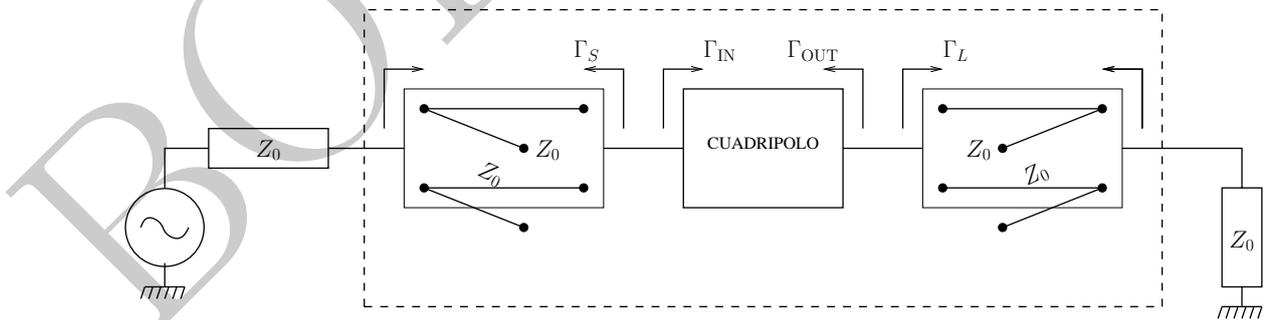


Figura 4: Cuadripolo con Redes de Adaptación de Tipo *Simple Stub*

Una forma simple de entender por qué esto último es así es la siguiente. Consideremos la red de entrada (red de la izquierda en la Figura 5). El tramo de línea a la izquierda del *stub* es como si no estuviese dado que, independientemente de la longitud de este tramo, la impedancia vista a la izquierda es siempre Z_0 . En otras palabras, los dos grados de libertad del diseño de la red de adaptación simple *stub* se reducen a uno y, por tanto, la red no es capaz de sintetizar una carga Γ_S arbitraria.

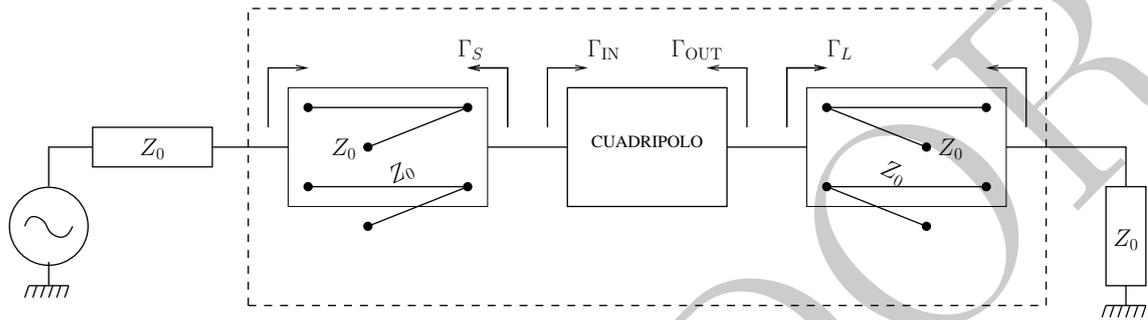


Figura 5: Cuadrípulo con Redes de Adaptación de Tipo *Simple Stub*. Colocación INCORRECTA de los *Stubs*

Teniendo en cuenta todo lo anterior, el esquema de diseño de las redes de adaptación simple *stub* se resume en la Figura 6 y 7.

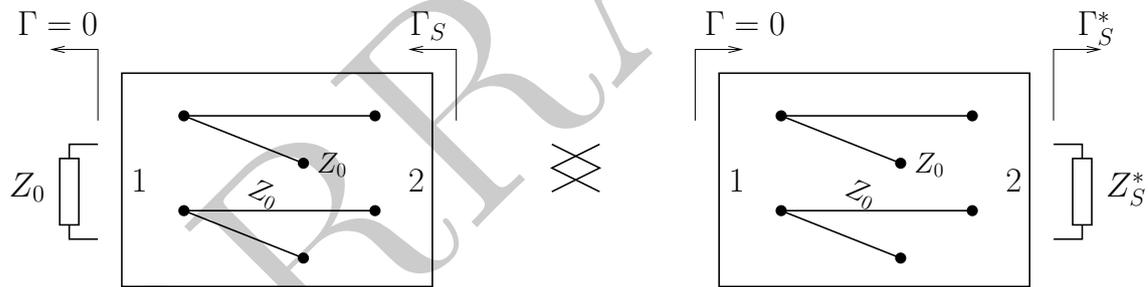


Figura 6: Esquema de Diseño de la Red de Adaptación de Entrada *Simple Stub*

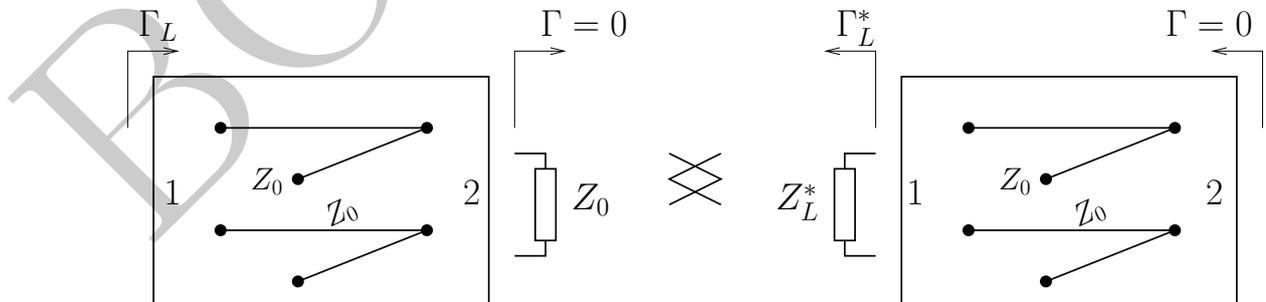


Figura 7: Esquema de Diseño de la Red de Adaptación de Salida
Simple *Stub*

d) Los parámetros de diseño de la red de adaptación de salida simple *stub* se muestran a continuación. Se denota d la longitud del tramo de línea y l la longitud del *stub*. Existen dos soluciones para el *simple stub*. Además, el *stub* puede estar en circuito abierto (que es como se ha mostrado en las figuras anteriores) o en cortocircuito, por lo que se tienen 4 soluciones. Hasta ahora se ha considerado el *stub* en paralelo como corresponde, por ejemplo, a la tecnología *stripline* o *microstrip*. Si se considera el *stub* en serie, como corresponde, por ejemplo, a la tecnología *slotline*, se tienen otras cuatro soluciones. En total, se tienen las 8 posibles soluciones siguientes:

▪ *Stub* en paralelo

• $d = 0.292\lambda, l = 0.363\lambda$

• $d = 0.458\lambda, l = 0.137\lambda$

Stub en circuito abierto

▪ *Stub* en serie

• $d = 0.042\lambda, l = 0.113\lambda$

• $d = 0.208\lambda, l = 0.387\lambda$

Stub en circuito abierto

• $d = 0.292\lambda, l = 0.113\lambda$

• $d = 0.458\lambda, l = 0.387\lambda$

Stub en cortocircuito

• $d = 0.042\lambda, l = 0.363\lambda$

• $d = 0.208\lambda, l = 0.137\lambda$

Stub en cortocircuito

18. Considere la red de la figura formada por una resistencia en serie con sendas líneas de transmisión de impedancias características Z_{01} y Z_{02} , respectivamente.

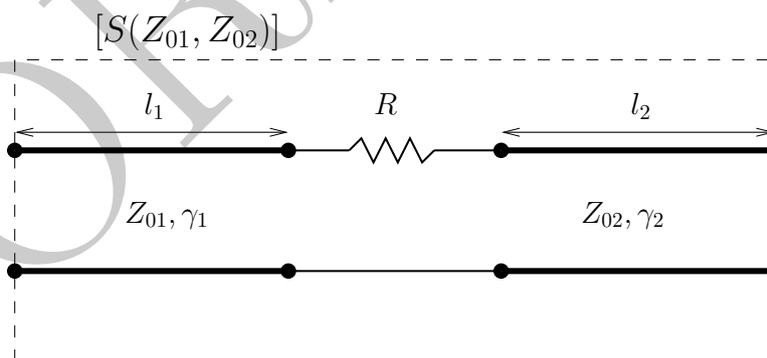


Figura 1: Cuadripolo

Calcule la matriz de parámetros S referida a impedancias de referencia de entrada y salida iguales a Z_{01} y Z_{02} , respectivamente.

Respuesta:

La forma más sencilla de resolver el problema es calcular los parámetros S (respecto a impedancias de referencia Z_{01} , Z_{02}) de la red formada sólo por la resistencia en serie (Figura 2). A partir de ahí, la matriz de parámetros S de la red del enunciado corresponde simplemente a un cambio de plano de referencia (ver Figura 4).

El cálculo de la matriz de parámetros S (respecto a impedancias de referencia Z_{01} , Z_{02}) de la red de la Figura 2 se calcula haciendo uso de la definición de ondas de potencia en términos de voltaje y corriente:

$$b_i = \frac{V_i - Z_{0i}I_i}{\sqrt{8Z_{0i}}}; \quad b_i = \frac{V_i + Z_{0i}I_i}{\sqrt{8Z_{0i}}}$$

De este modo, considerando el puerto a la izquierda como puerto 1, calculamos

$$S_{11}^R = \frac{b_1^{Z_{01}}}{a_1^{Z_{01}}} \Big|_{a_2^{Z_{02}}=0} = \frac{V_1 - Z_{01}I_1}{V_1 + Z_{01}I_1} \quad \text{con } Z_{02} \text{ en puerta 2}$$

En base al circuito de la Figura 3, es fácil inferir que

$$S_{11}^R = \frac{V_1 - Z_{01}I_1}{V_1 + Z_{01}I_1} = \frac{(R + Z_{02})I_1 - Z_{01}I_1}{(R + Z_{02})I_1 + Z_{01}I_1} = \frac{R + Z_{02} - Z_{01}}{R + Z_{02} + Z_{01}}$$

Nótese que el resultado obtenido para S_{11} corresponde simplemente al coeficiente de reflexión en el puerto 1 (respecto a la impedancia Z_{01}) cuando el puerto 2 está cargado con Z_{02} .

De igual modo, se obtiene S_{21} :

$$S_{21}^R = \frac{b_2^{Z_{02}}}{a_1^{Z_{01}}} \Big|_{a_2^{Z_{02}}=0} = \frac{V_2 - Z_{02}I_1}{V_1 + Z_{01}I_1} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad \text{con } Z_{02} \text{ en puerta 2}$$

$$S_{21}^R = \frac{V_2 - Z_{02}I_2}{V_1 + Z_{01}I_1} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \frac{Z_{02}I_1 + Z_{02}I_1}{(R + Z_{02})I_1 + Z_{01}I_1} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \frac{2Z_{02}}{R + Z_{02} + Z_{01}} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}$$

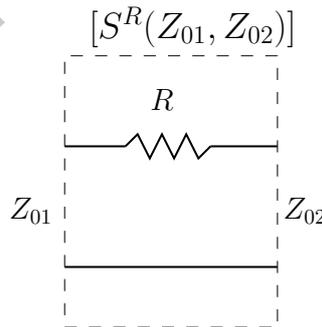


Figura 2: Cuadripolo consistente en resistencia en serie

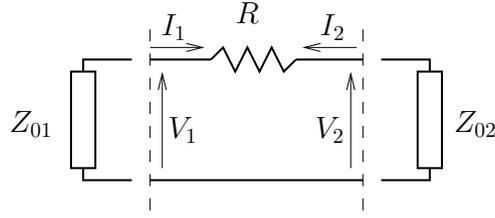


Figura 3: Cuadripolo consistente en resistencia en serie cargado en sus puertos 1 y 2

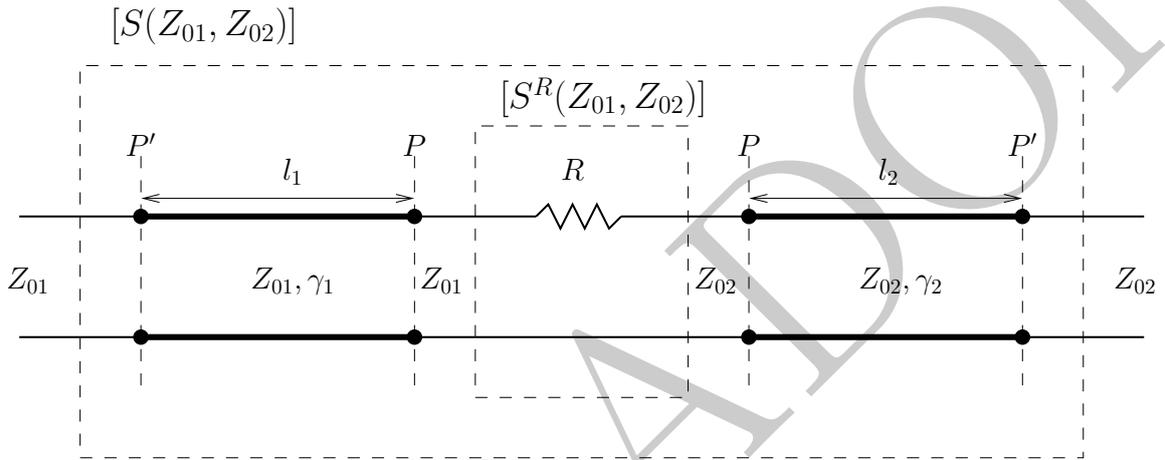


Figura 4: Cuadripolo del enunciado de la Figura 1 como cuadripolo de Figura 2 con cambio de plano de referencia

De forma análoga, excitando el puerto 2 y cargando el puerto 1 con Z_{01} , se obtienen S_{12}^R y S_{22}^R :

$$S_{22}^R = \frac{V_2 - Z_{02}I_2}{V_2 + Z_{02}I_2} = \frac{R + Z_{01} - Z_{02}}{R + Z_{01} + Z_{02}}$$

$$S_{12}^R = \frac{V_1 - Z_{01}I_1}{V_2 + Z_{02}I_2} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} = \frac{2Z_{01}}{R + Z_{01} + Z_{02}} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}$$

Puede comprobarse que $S_{21}^R = S_{12}^R$ como, por otro lado, es de esperar dado que el circuito es recíproco. Nótese, sin embargo, que $S_{11}^R \neq S_{22}^R$ aunque la red en sí lo sea. Esto es debido a que las impedancias de referencia empleadas en los puertos no son iguales: $Z_{01} \neq Z_{02}$.

Una vez que se tiene $[S^R(Z_{01}, Z_{02})]$, y tal como se comentó anteriormente, la solución del ejercicio viene dada simplemente por un cambio de plano de referencia (como se ilustra en la Figura 4).

La propiedad de cambio de plano implica que la matriz $[S^R(Z_{01}, Z_{02})]$ y la matriz $[S(Z_{01}, Z_{02})]$

del circuito completo están relacionadas mediante

$$[S(Z_{01}, Z_{02})] = [P]^t [S^R(Z_{01}, Z_{02})] [P] \quad \text{con } [P] = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 l_1} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 l_2} \end{bmatrix}$$

lo que implica:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{11}^R e^{-2\gamma_1 l_1} \\ S_{22} &= S_{22}^R e^{-2\gamma_2 l_2} \\ S_{21} &= S_{21}^R e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} \\ S_{12} &= S_{12}^R e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} \end{aligned}$$

donde $S_{21}^R = S_{12}^R$.

Nótese que $S_{11} \neq S_{22}$ y que $S_{21} = S_{12}$ (esto último reflejo de la reciprocidad del circuito).

19. El circuito de la figura representa a un circuito genérico de 4 puertos al que se le ha conectado un aislador ideal. Indique la matriz de parámetros S del circuito completo en función de los parámetros S del circuito de 4 puertos (matriz $[S_A]$).

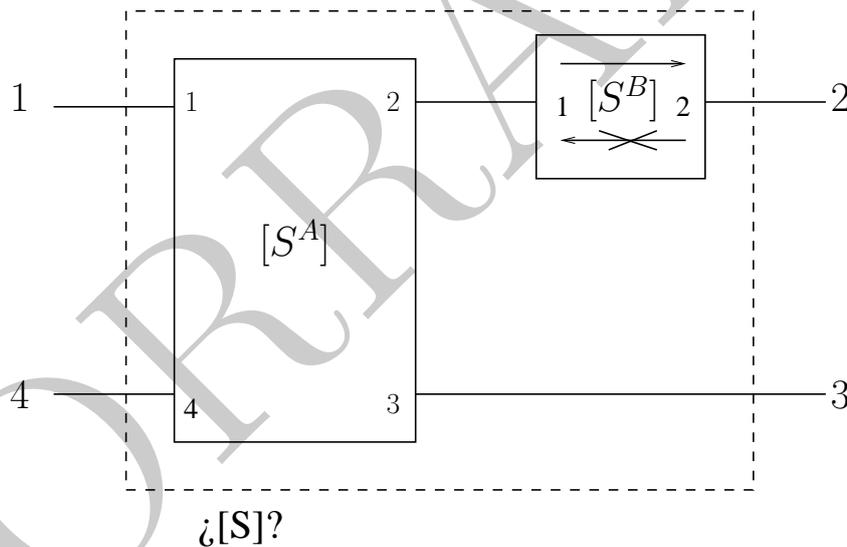


Figura 1: Circuito de 4 puertos con aislador en puerta 2

¿Cual sería la respuesta de haberse tenido el aislador colocado de forma opuesta (ver figura)?

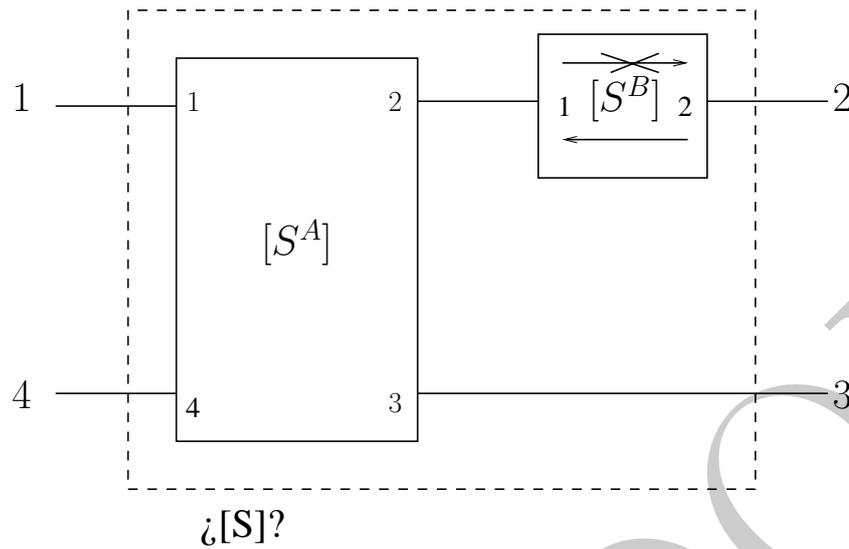


Figura 2: Circuito de 4 puertas con aislador en puerta 2 (montado de forma inversa a la Figura 1)

NOTA: La matriz $[S_B]$ correspondiente al aislador ideal es

$$[S^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Figura 1) ; } \quad [S^B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Figura 2)}$$

Respuesta:

- Caso de Figura 1

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11}^A & 0 & S_{13}^A & S_{14}^A \\ S_{21}^A & 0 & S_{23}^A & S_{24}^A \\ S_{31}^A & 0 & S_{33}^A & S_{34}^A \\ S_{41}^A & 0 & S_{43}^A & S_{44}^A \end{bmatrix}$$

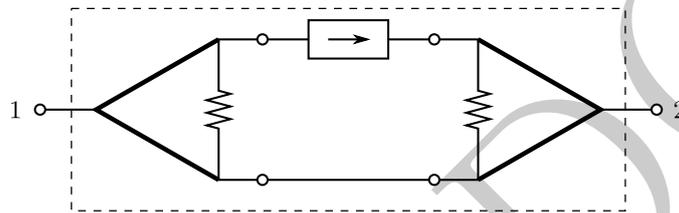
- Caso de Figura 2

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11}^A & S_{12}^A & S_{13}^A & S_{14}^A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}^A & S_{32}^A & S_{33}^A & S_{34}^A \\ S_{41}^A & S_{42}^A & S_{43}^A & S_{44}^A \end{bmatrix}$$

20. Considere un aislador, de modo que con impedancias de referencia Z_0 esté perfectamente adaptado y tenga transmisión total del puerto 1 al 2 y aislamiento completo del puerto 2 al 1 (es decir, el aislador es ideal). Se pretende determinar su matriz de scattering referida a Z_1 , en general diferente de Z_0 .

- a) Deduzca razonadamente los parámetros de reflexión y de transmisión inversa.
- b) Calcule el parámetro de transmisión directa. Para ello se recomienda que:
- Determine las relaciones entre tensiones y corrientes que la matriz $S[Z_0]$ impone.
 - Aplique las condiciones de carga de la matriz $S[Z_1]$.
 - Resuelva las ondas de potencia.

Sea ahora el caso particular $Z_0 = 50 \Omega$, $Z_1 = 75 \Omega$. Algunos parámetros del aislador de los apartados anteriores son $S_{11} = -0.2$ y $S_{21} = 0.96$. Además de dicho aislador se dispone de dos divisores Wilkinson simétricos diseñados con impedancia de referencia $Z_1 = 75 \Omega$. Con los tres elementos se forma la siguiente red:



- c) Escriba la matriz de scattering de un Wilkinson respecto a 75Ω .
- d) Determine la matriz de scattering de la red completa respecto a 75Ω .
- e) La red completa, cargada con sus impedancias de referencia, se excita con 1 W por el puerto 1. Indique en estas condiciones las potencias reflejada y transmitida, así como la potencia disipada en cada uno de los tres elementos.

Respuesta:

- a) El aislador está perfectamente adaptado en el puerto 1 cuando la impedancia de referencia en dicho puerto es Z_0 , independientemente de la carga en el puerto 2, ya que es un aislador ideal y la potencia reflejada en la carga del puerto 2 es absorbida. Por tanto, su impedancia de entrada es siempre Z_0 y si la impedancia de referencia del puerto 1 es Z_1 resulta

$$S_{11} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1}$$

Por otra parte, se puede razonar de modo similar para el caso del puerto 2, aunque en este caso directamente no llega potencia a la carga del puerto 1, independientemente de las impedancias de referencia. Por tanto, $S_{22} = S_{11}$ pero además también $S_{12} = 0$.

- b) Siguiendo las instrucciones indicadas se tiene
- Relaciones de tensiones y corrientes que impone $S[Z_0]$:

$$\begin{aligned} b_1^{Z_0} = 0 &\Rightarrow V_1 = Z_0 I_1 \\ b_2^{Z_0} = a_1^{Z_0} &\Rightarrow V_2 - Z_0 I_2 = V_1 + Z_0 I_1 = 2Z_0 I_1 \end{aligned}$$

- Condiciones de carga de $S[Z_1]$:

$$a_2^{Z_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = -Z_1 I_2$$

Por tanto, sustituyendo en la segunda de las ecuaciones anteriores,

$$I_2 = -\frac{2Z_0}{Z_0 + Z_1} I_1$$

- Resolución de las ondas de potencia:

$$a_1^{Z_1} = \frac{V_1 + Z_1 I_1}{\sqrt{8Z_1}} = (Z_0 + Z_1) \frac{I_1}{\sqrt{8Z_1}}$$

$$b_2^{Z_1} = \frac{V_2 - Z_1 I_2}{\sqrt{8Z_1}} = \frac{-2Z_1 I_2}{\sqrt{8Z_1}} = \frac{4Z_0 Z_1}{Z_0 + Z_1} \frac{I_1}{\sqrt{8Z_1}}$$

Y por último, aplicando su definición queda resuelto S_{21} :

$$S_{21} = \frac{b_2^{Z_1}}{a_1^{Z_1}} \Big|_{a_2^{Z_1}=0} = \frac{4Z_0 Z_1}{(Z_0 + Z_1)^2}$$

En conclusión, la matriz de scattering completa es

$$S[Z_1] = \frac{1}{Z_0 + Z_1} \begin{bmatrix} Z_0 - Z_1 & 0 \\ \frac{4Z_0 Z_1}{Z_0 + Z_1} & Z_0 - Z_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(Z_0 + Z_1)^2} \begin{bmatrix} Z_0^2 - Z_1^2 & 0 \\ 4Z_0 Z_1 & Z_0^2 - Z_1^2 \end{bmatrix}$$

En particular, dos casos interesantes son el trivial, $Z_1 = Z_0$, y el que se utiliza en los siguientes apartados con $Z_0 = 50 \Omega$ y $Z_1 = 75 \Omega$, es decir, $Z_1 = 1.5Z_0$. Sustituyendo resultan

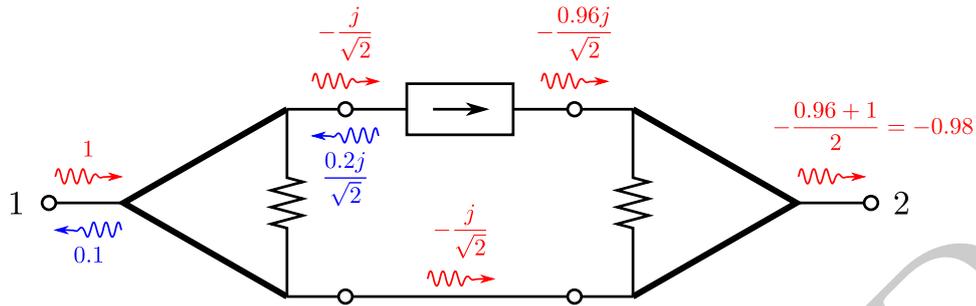
$$S[Z_1 = Z_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S[Z_1 = 1.5Z_0] = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.96 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

- c) Se trata de escribir la matriz de scattering respecto a $Z_1 = 75 \Omega$ de un Wilkinson diseñado con esa misma impedancia de referencia, por lo que es el caso básico bien conocido⁵:

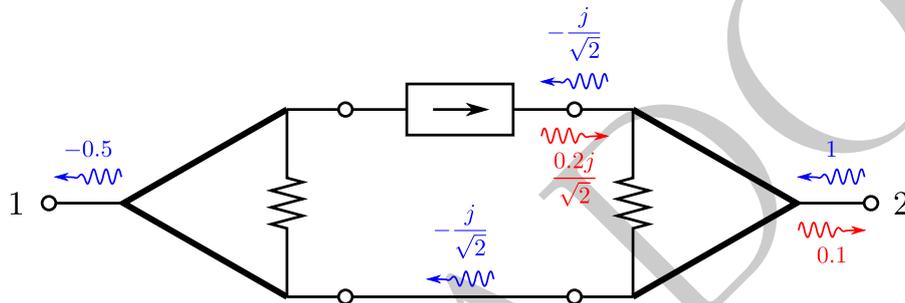
$$S = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- d) Si se excita el puerto 1 con una onda de potencia normalizada a la unidad, las ondas de potencia en cada punto del circuito son las siguientes:

⁵La matriz de parámetros S del circuito divisor/combinador de Wilkinson se estudia en el bloque de circuitos pasivos.



Es decir, $S_{11} = 0.1$ y $S_{21} = -0.98$. Si se excita del mismo modo el puerto 2, las ondas de potencia son:



Y por tanto, $S_{22} = 0.1$ y $S_{12} = -0.5$. En consecuencia, la matriz de scattering del cuadripolo completo es

$$S = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 \\ -0.98 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

- e) Puesto que la red está cargada con sus impedancias de referencia y se excita con 1 W por el puerto 1, la potencia reflejada y transmitida son directamente los módulos al cuadrado de los dos primeros parámetros de scattering del apartado anterior:

$$P_{rx} = |S_{11}|^2 = 0.01 \text{ W}$$

$$P_{tx} = |S_{21}|^2 = 0.9604 \text{ W}$$

Por otra parte, la potencia disipada en cada elemento es la diferencia entre la potencia que entra y la que sale. Cada una de ellas es la suma de las potencias de las ondas incidentes o reflejadas, es decir, de sus módulos al cuadrado. Por tanto

$$P_{dis,w1} = 1^2 + \left(\frac{0.2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 0.1^2 = 0.01 \text{ W}$$

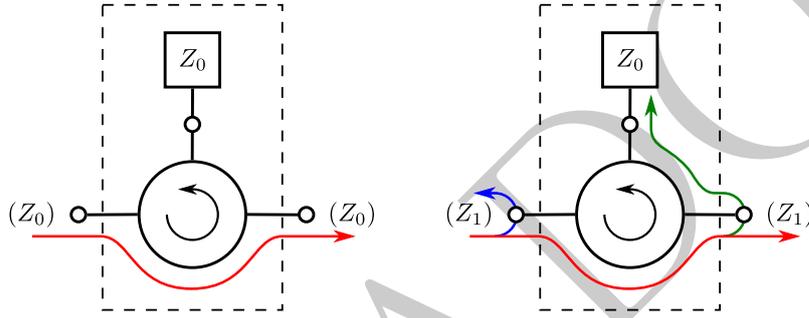
$$P_{dis,ai} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{0.96}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{0.2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0.0192 \text{ W}$$

$$P_{dis,w2} = \left(\frac{0.96}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 0.98^2 = 0.0004 \text{ W}$$

Por supuesto, la suma de todas las potencias obtenidas es igual a la potencia de la excitación,

$$P_{tx} + P_{rx} + P_{dis,w1} + P_{dis,ai} + P_{dis,w2} = 1 \text{ W.}$$

Aquí se aprecia un resultado interesante, ya que $P_{dis,ai} \neq 0$: al cambiar la impedancia de referencia el aislador deja de ser ideal no sólo debido a la desadaptación, sino a que también es disipativo incluso en el sentido directo. Esto es debido a la reflexión interna que se produce a la salida del aislador cuando en el puerto 2 no hay una carga Z_0 . Dicha reflexión se disipa, al retornar del puerto 2 hacia el 1. En las figuras siguientes se representa este efecto con un aislador formado por un circulator de tres puertos adaptados a Z_0 , con uno de ellos cargado también con Z_0 .



La primera figura corresponde al aislador con impedancia de referencia Z_0 : al excitar el puerto de entrada toda la potencia se transmite al de salida. Cuando se cambia la impedancia de referencia a Z_1 se produce reflexión en el puerto de entrada, ya que $Z_1 \neq Z_0$, lo cual da lugar a $S_{11} \neq 0$. Pero además se produce reflexión en el puerto de salida, ya que el circulator está adaptado a Z_0 , no Z_1 . Esta reflexión se redirige al puerto cargado, que no refleja nada ya que sí está adaptado. Esto mismo causa también que $S_{12} = 0$. En resumen, utilizando el modelo de aislador de las figuras, puesto que $|\Gamma^{Z_0}(Z_1)|^2 = |\Gamma^{Z_1}(Z_0)|^2 = 0.04$ y la potencia incidente en el aislador es 0.5 W, la potencia reflejada en el puerto 1 es 0.02 W, la potencia que llega al puerto 2 es por tanto 0.48 W y la reflejada en ese puerto, que es la disipada, 0.0192 W, de acuerdo con el resultado ya indicado.

Respecto a la potencia disipada en los divisores Wilkinson también se puede hacer una interpretación física. Puede recordarse que un divisor Wilkinson no produce pérdidas cuando la excitación tiene simetría par, bien sea porque se excita el puerto común o porque la excitación es igual en los otros dos puertos. Sin embargo, el divisor atenúa la excitación impar, o mejor dicho, la componente impar de la excitación. Por tanto, la potencia disipada en cada Wilkinson es precisamente la potencia de esa componente impar:

$$P_{dis,w1} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{0.2j}{\sqrt{2}} - 0 \right) \right|^2 = 0.01 \text{ W}$$

$$P_{dis,w2} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-0.96j}{\sqrt{2}} - \frac{-j}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 = 0.0004 \text{ W.}$$

21. Calcule los parámetros S (respecto a la impedancia de referencia Z_0) de la red reactiva de la figura,

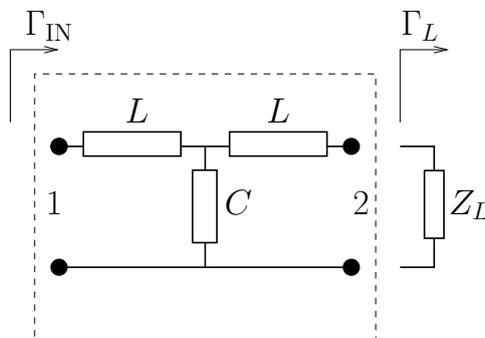


Figura 1

en el que se ha medido el coeficiente de reflexión a la entrada (respecto a la impedancia de referencia Z_0), Γ_{IN} , en condiciones de adaptación ($\Gamma_L = 0$):

$$\Gamma_L = 0 \Rightarrow \Gamma_{IN} = 0.3 + j0.9$$

Respuesta:

La observación de la red nos permite concluir que:

- La red es recíproca dado que está constituida por impedancias y, por tanto, $S_{21} = S_{12}$. Nótese que el análisis por mallas, o nudos, de la red lleva a matriz de impedancia $[Z]$ simétrica, o admitancia $[Y]$ simétrica, respectivamente.
- La red es simétrica (respecto plano vertical pasando por el condensador) y, por tanto, $S_{11} = S_{22}$.
- La red es sin pérdidas (no disipativa) y, por tanto, la matriz $[S]$ es unitaria: se debe cumplir que $[S]^H[S] = [I]$, denotando $[I]$ la matriz identidad.

De este modo,

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$$

es decir, se tienen dos parámetros S relacionados por la condición de matriz $[S]$ unitaria.

La medida en condiciones de adaptación en la otra puerta, $\Gamma_L = 0$, permite obtener directamente

$$S_{11} = 0.3 + j0.9$$

El otro parámetro, S_{21} , se obtiene de la condición de matriz $[S]$ unitaria:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (1)$$

$$S_{11}^* S_{21} + S_{21}^* S_{22} = 0 \quad (2)$$

Se observa que $|S_{21}|$ se obtiene directamente de (1):

$$|S_{21}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2} = \sqrt{0.1} \quad (3)$$

La fase de S_{21} se obtiene a partir de (2), que puede expresarse de la forma

$$\frac{S_{11}^*}{S_{11}} = -\frac{S_{21}^*}{S_{21}} \Rightarrow 2\varphi_{11} = 2\varphi_{21} \pm \pi \Rightarrow \varphi_{11} = \varphi_{21} \pm \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

siendo φ_{ij} la fase de S_{ij} .

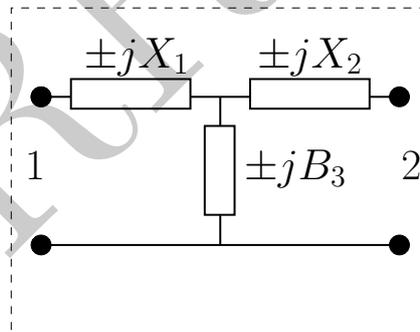
Nótese la ambigüedad en la determinación de φ_{ij} . Ello es debido a que en la condición de matriz unitaria para $[S]$ interviene S_{21}^2 (asumiendo reciprocidad para el circuito) con lo que lo que realmente está determinado es la fase de S_{21}^2 y no la de S_{21} .

Teniendo en cuenta dicha ambigüedad, las dos posibles soluciones para S_{21} son:

$$\begin{aligned} \varphi_{21} = \varphi_{11} - \frac{\pi}{2} &\Rightarrow S_{21} = 0.3 - j0.1 \\ \varphi_{21} = \varphi_{11} + \frac{\pi}{2} &\Rightarrow S_{21} = -0.3 + j0.1 \end{aligned}$$

Conviene resaltar que las dos soluciones anteriores para S_{21} son para un circuito simétrico sin pérdidas que cumpla la condición del enunciado, es decir, $S_{11} = 0.3 + j0.9$.

- 22.** Un cuadripolo que se quiere medir se ha modelado mediante una red en T como muestra la figura siguiente. Se sabe que las tres impedancias $Z_1 = \pm jX_1$, $Z_2 = \pm jX_2$, $Z_3 = \pm 1/jB_3$ son diferentes y, obviamente, imaginarias puras.



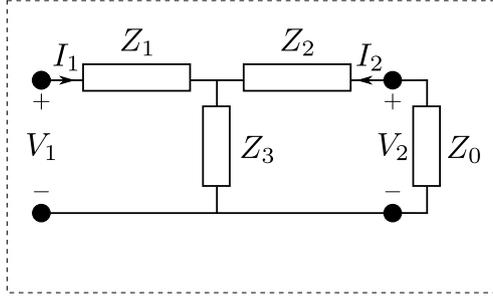
- Determine de forma analítica, en función de los valores de Z_i , los parámetros S_{11} y S_{21} de la matriz de parámetros S (caracterizada respecto a una impedancia de referencia Z_0).
- Justifique si la red anterior es simétrica, recíproca y sin pérdidas.
- Se conecta el dispositivo al medidor mediante dos cables de longitud 10 cm e impedancia característica Z_0 , ¿cuánto varía la amplitud de los parámetros S anteriormente determinados?

Respuesta:

a) La definición de los parámetros solicitados es

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}, \quad S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

Por tanto es necesario analizar el circuito con $a_2 = 0$, o lo que es lo mismo, con el puerto 2 cargado con la impedancia de referencia Z_0 .



$$\begin{aligned} V_1 &= (Z_1 + Z_3)I_1 + Z_3I_2 \\ V_2 &= Z_3I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 \\ V_2 &= -Z_0I_2 \end{aligned}$$

Mediante las dos últimas ecuaciones se puede eliminar V_2 y despejar I_2 en función de I_1 :

$$I_2 = -\frac{Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_0}I_1.$$

Y sustituyendo I_2 en la primera ecuación se despeja V_1 en función de I_1 :

$$V_1 = \left(Z_1 + Z_3 - \frac{Z_3^2}{Z_2 + Z_3 + Z_0} \right) I_1$$

Como resultado se ha llegado a las expresiones de las tensiones y corrientes de los puertos en función todas ellas de I_1 , por lo que las ondas de potencia también dependerán únicamente de dicha corriente:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{V_1 + Z_0I_1}{\sqrt{8Z_0}} = \left(Z_1 + Z_3 + Z_0 - \frac{Z_3^2}{Z_2 + Z_3 + Z_0} \right) \frac{I_1}{\sqrt{8Z_0}} \\ b_1 &= \frac{V_1 - Z_0I_1}{\sqrt{8Z_0}} = \left(Z_1 + Z_3 - Z_0 - \frac{Z_3^2}{Z_2 + Z_3 + Z_0} \right) \frac{I_1}{\sqrt{8Z_0}} \\ a_2 &= \frac{V_2 + Z_0I_2}{\sqrt{8Z_0}} = 0 \\ b_2 &= \frac{V_2 - Z_0I_2}{\sqrt{8Z_0}} = \frac{-2Z_0I_2}{\sqrt{8Z_0}} = \frac{2Z_3Z_0}{Z_2 + Z_3 + Z_0} \frac{I_1}{\sqrt{8Z_0}} \end{aligned}$$

Y aplicando la definición y simplificando los términos comunes quedan determinados los parámetros S_{11} y S_{21} ,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{(Z_1 + Z_3 - Z_0)(Z_2 + Z_3 + Z_0) - Z_3^2}{(Z_1 + Z_3 + Z_0)(Z_2 + Z_3 + Z_0) - Z_3^2} \\ S_{21} &= \frac{2Z_0Z_3}{(Z_1 + Z_3 + Z_0)(Z_2 + Z_3 + Z_0) - Z_3^2} \end{aligned}$$

- b) Intercambiar los puertos de la red supone resolver un problema idéntico, pero con las impedancias Z_1 y Z_2 también intercambiadas. Haciendo esta sustitución en la expresión de S_{11} anterior se obtiene por tanto

$$S_{22} = \frac{(Z_1 + Z_3 + Z_0)(Z_2 + Z_3 - Z_0) - Z_3^2}{(Z_1 + Z_3 + Z_0)(Z_2 + Z_3 + Z_0) - Z_3^2}$$

por lo que $S_{11} \neq S_{22}$ y la red en general no es simétrica, con dos excepciones:

- $Z_1 = Z_2$,
- $Z_3 = \infty$, con lo que la red es simplemente una impedancia en serie de valor $Z_1 + Z_2$.

Aplicando el mismo razonamiento se llega a que $S_{21} = S_{12}$, con lo que la red es recíproca. Sin embargo, esto no es necesario: se sabe que la red es recíproca porque está formada exclusivamente por impedancias, que son elementos recíprocos.

Para el caso de las pérdidas, podría pensarse en sustituir los valores de las impedancias por los indicados, puramente imaginarios, y determinar si la matriz S es unitaria. Pero de nuevo esto no es necesario, se sabe que la red no tiene pérdidas al estar formada por elementos sin pérdidas (reactancias puras).

- c) Los nuevos parámetros S serán de la forma $S'_{mn} = S_{mn}e^{-2j\beta l}$. Dicho de otro modo, los cables sólo introducen un cambio de fase, al ser Z_0 su impedancia característica. Por tanto la amplitud de los parámetros S no se ve afectada. Por supuesto, todo ello depende de que la atenuación en los cables sea despreciable. En caso contrario, si la atenuación es α la relación será $|S'_{mn}| = |S_{mn}|e^{-2\alpha l}$.

23. Considere la matrices siguientes de parámetros S (referidas a Z_0) de sendos circuitos de microondas:

$$[S^A] = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S^B] = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Determine, para cada circuito, si se trata de un circuito sin pérdidas.
 b) En caso de que no se trate de un circuito sin pérdidas determine el carácter (activo o pasivo) del circuito.

NOTA: Para ello deberá considerar excitaciones en fase y contrafase por pares de puertas; en concreto para los pares de puertas: 1-2 y 3-4. Obtenga el balance de potencia (potencia saliente del circuito menos potencia entrante al circuito) para los casos mencionados. A partir de los resultados obtenidos concluya sobre el carácter (activo o pasivo) del circuito en cuestión.

Respuesta:

a) Dado que⁶

$$[S^A]^H[S^A] = [I], \quad [S^A]^H[S^B] \neq [I]$$

el circuito correspondiente a $[S^A]$ es sin pérdidas, y el segundo, correspondiente a $[S^B]$, no lo es.

Nótese que, en lo relativo a las condiciones que sólo incluyen los módulos de los parámetros S , ambos circuitos las satisfacen:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 + |S_{41}|^2 = 1$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{32}|^2 + |S_{42}|^2 = 1$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 + |S_{43}|^2 = 1$$

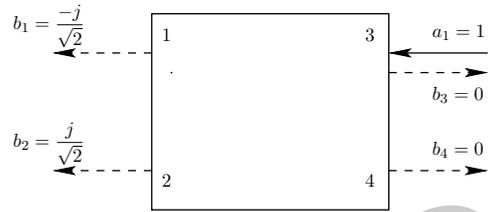
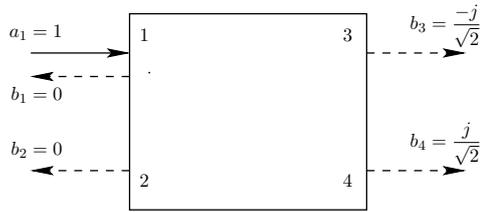
$$|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 + |S_{44}|^2 = 1$$

De este modo, el hecho de que el circuito B sea con pérdidas (“positivas” ó “negativas”; aún por determinar en el apartado siguiente) tiene que ver necesariamente con las fases de sus parámetros S (fases relativas entre sí).

b) En el apartado anterior se ha demostrado que el circuito B no es sin pérdidas, es decir, que al menos en algún caso (excitaciones de sus entradas) el circuito devuelve una cantidad de potencia diferente a la que le ha sido entregada. Si para cualquier combinación de excitaciones a sus entradas el circuito devuelve una potencia igual o menor que la que le ha sido entregada tenemos un un circuito pasivo. Por el contrario, si para alguna combinación de excitaciones de sus entradas la potencia devuelta por el circuito es mayor que la que le ha sido entregada tenemos un circuito activo.

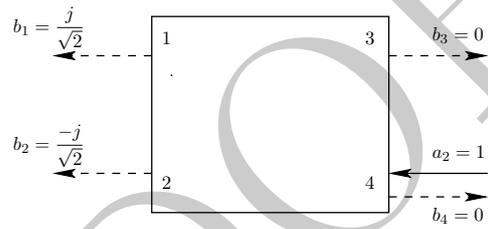
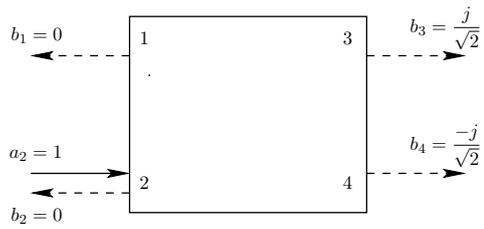
Siguiendo lo indicado en el enunciado se va a “probar” con excitaciones en fase y contrafase para los pares de puertas 1-2 y 3-4. Los resultados se ilustran en las figuras 1, 2, 3, 4.

⁶El símbolo $[I]$ denota la matriz unidad (elemento neutro de la multiplicación de matrices).



+

+



||

||

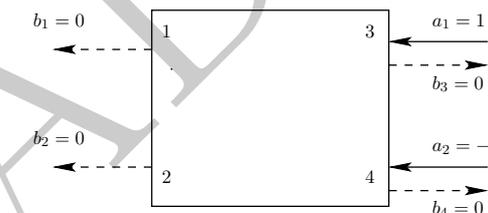
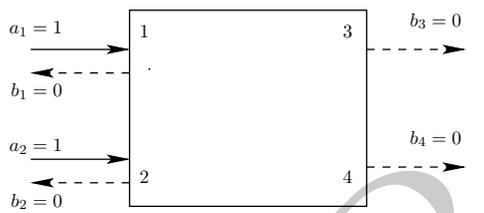


Figura 1: Entradas en fase en 1 y 2

Figura 2: Entradas en fase en 3 y 4

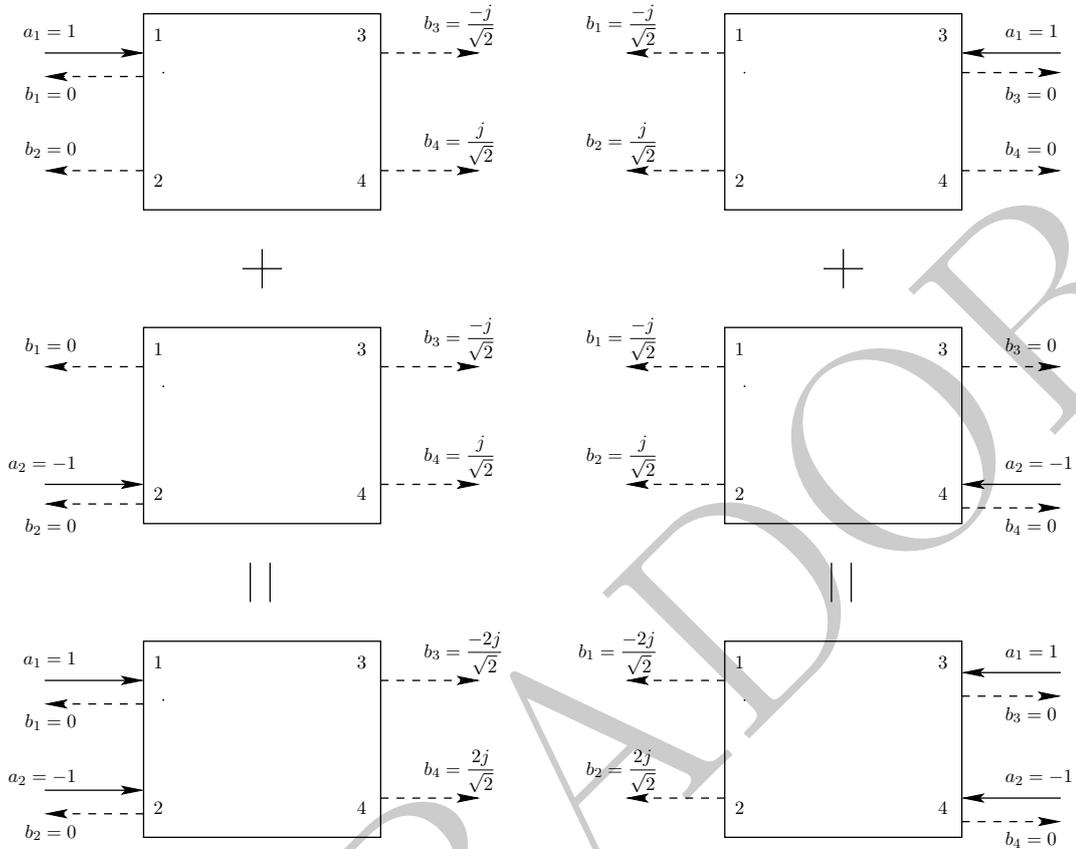


Figura 3: Entradas en contrafase en 1 y 2 Figura 4: Entradas en contrafase en 3 y 4

Se observa que para las excitaciones en fase la potencia devuelta por el circuito $\sum_i |b_i|^2$ es nula, es decir, el circuito disipa toda la potencia. Sin embargo, para las excitaciones en contrafase la potencia devuelta por el circuito $\sum_i |b_i|^2$ es 2 veces la que entra $\sum_i |a_i|^2$, es decir, ha existido amplificación. Por tanto, se concluye que el circuito es activo.

NOTA: Existe otra forma de concluir sobre el carácter activo o pasivo del circuito B . Dicha forma se muestra a continuación por completitud; sin embargo, era obligado resolver el ejercicio de la manera que se ha mostrado anteriormente.

Si se calculan los autovalores λ_i , y autovectores asociados ν_i , de la matriz

$$[I] - [S]^H[S] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$\lambda_1 = 1, \quad \nu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -1, \quad \nu_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_4 = -1, \quad \nu_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los autovalores positivos ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) indican que con excitaciones proporcionales a los autovectores correspondientes ($\nu_i, i = 1, 2$) el circuito entrega menos potencia de la que le se suministra, es decir, el comportamiento del circuito es con pérdidas disipativas; véanse las figuras 1, 2. Sin embargo, la presencia de autovalores negativos ($\lambda_3 = \lambda_4 = -1$) es reflejo de que con ciertas excitaciones, las proporcionales a los autovectores correspondientes ($\nu_i, i = 3, 4$), el circuito entrega más potencia que la que se suministra; véanse las figuras 3, 4. Por tanto se concluye que el circuito *B* es activo dado que existe alguna combinación de excitaciones de sus puertas para las que la potencia devuelta por el dispositivo es mayor que la que se le ha introducido. Nótese que los autovectores corresponden a las excitaciones en fase y contrafase para las que se pedía hacer el balance de potencia en el enunciado.

Como conclusión, se puede decir lo siguiente. El primer circuito es un acoplo directivo antisimétrico, por ejemplo, un acoplador direccional de tipo *rat-race*⁷. La matriz de parámetros *S* del segundo circuito es un “aparante error” respecto a la matriz del primero en los signos de algunos de sus coeficientes. Pero en vez de representar un acoplo directivo como el primero (con otras fases), aprendemos que damos con un circuito que no tiene nada que ver con el primero (de hecho, no es ni siquiera un circuito pasivo).

Otros matrices de parámetros *S* que son “variaciones” de las del circuito A del enunciado son las representadas por la expresión siguiente:

$$[S] = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que los circuitos representados por las matrices *[S]* de la expresión anterior son igualmente activos como el circuito B del enunciado. Se deja como ejercicio el

⁷Los acopladores direccionales de tipo *rat-race*, y de otros tipos, son objeto del tema “Dispositivos Pasivos” en esta colección.

encontrar otras combinaciones de coeficientes 1 y -1 que, teniendo las parejas de puertas 1-2 y 3-4 desacopladas, no cumplan las condiciones de matriz unitaria.

BORRADOR

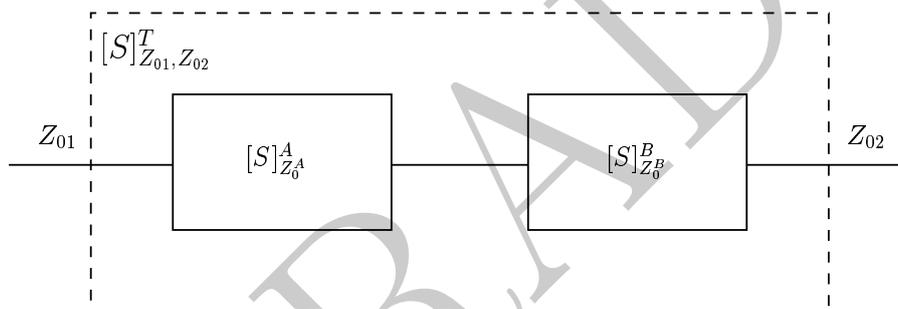
Ejercicios no resueltos

24. Se ha calculado la matriz de parámetros S de un cuadripolo referida a Z_0 , $[S(Z_0)]$, y se ha obtenido un valor del parámetro S_{11} igual a 0.2. ¿Cuánto vale el parámetro S'_{11} si se toma como impedancia de referencia en la puerta de entrada $Z'_0 = 2.5Z_0$, manteniendo una impedancia de referencia de valor Z_0 en la puerta de salida?

Respuesta:

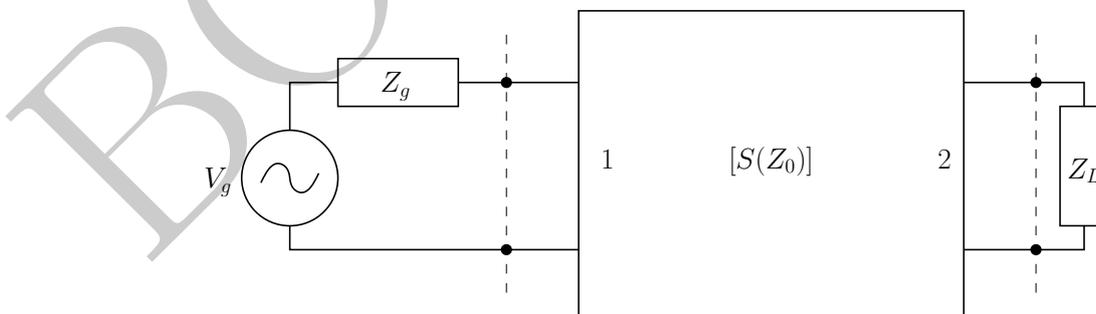
25. Considere un cuadripolo formado por las redes A y B conectadas en cascada. Las redes A y B se han caracterizado por sus parámetros S que han sido medidos utilizando impedancias de referencia Z_0^A y Z_0^B para las redes A y B, respectivamente.

Obtenga los coeficientes S_{11} y S_{22} de la matriz de parámetros S del cuadripolo total referidos a impedancias de referencia de entrada y salida Z_{01} y Z_{02} , respectivamente.



Respuesta:

26. La figura representa un cuadripolo del que se conocen sus parámetros S referidos a Z_0 conectado a una carga Z_L y un generador (de amplitud V_g e impedancia interna $Z_g = Z_0$). Exprese en función de dichos parámetros:



- a) Potencia entregada a $Z_L = Z_0$.
- b) ¿Se obtiene la máxima potencia posible en esta situación?
- c) Si la respuesta en a es negativa, calcule la ganancia de transducción y la impedancia de carga que hace máxima dicha potencia.
- d) Si se tuviera $S_{12} = 0$, ¿cuál sería la ganancia de transducción si se adapta la entrada del cuadripolo con una red sin pérdidas y se mantiene la Z_L óptima?

Respuesta:

27. Considere la red adaptadora de la figura 1 formada por una sección de línea de transmisión de longitud eléctrica $\lambda/4$ e impedancia característica Z_1 . A dicha red se le conoce como “transformador $\lambda/4$ ”.

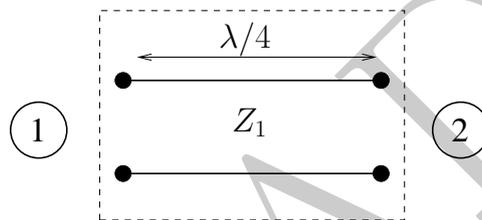


Figura 1

Se pide:

- a) Razone sobre los siguientes aspectos de la red adaptadora $\lambda/4$:
 - a.1) ¿Es una red recíproca?
 - a.2) ¿Es una red simétrica?
 - a.3) ¿Es una red sin pérdidas (no disipativa)?
- b) En base a las respuestas anteriores, y sabiendo que la red ha sido diseñada para adaptar $Z_L = 100 \Omega$ a $Z_0 = 50 \Omega$ (ver figura 2), indicar la matriz de parámetros S respecto a Z_0 . Justifique la respuesta.

NOTA: No se trata de calcular de forma rigurosa (en base a la definición de ondas de potencia en términos de voltaje-corriente) la matriz $[S]$ del transformador $\lambda/4$ sino en razonar cómo deben ser los S_{ij} en base a las propiedades del circuito.

Respuesta:

28. Calcule los parámetros S (respecto a la impedancia de referencia Z_0) de la red de la figura,

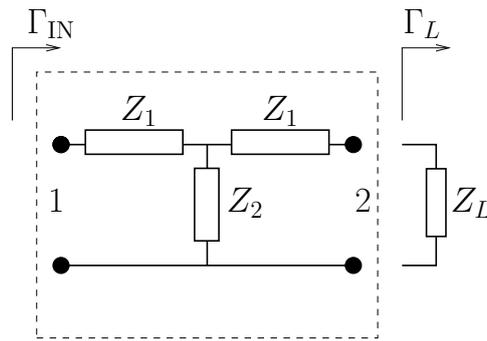


Figura 1

en el que se ha medido el coeficiente de reflexión a la entrada (respecto a la impedancia de referencia Z_0), Γ_{IN} , con dos impedancias de carga (coeficientes de reflexión Γ_L) diferentes:

$$\Gamma_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{IN} = 0.56 \angle -138.2^\circ$$

$$\Gamma_L = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{IN} = 1 \angle -125.9^\circ$$

Respuesta:

29. Considere un circuito de tres puertos recíproco y sin pérdidas.

- Demuestre que el circuito no puede tener adaptadas simultáneamente todas sus puertos, $S_{ii} = 0, i = 1 \dots 3$.
- Demuestre que si el circuito tiene dos de sus puertos adaptados (por ejemplo, $S_{11} = S_{22} = 0$), el tercer puerto está completamente desacoplado/aislado de los dos primeros ($S_{13} = S_{23} = 0$).

NOTA: Cuando se da la circunstancia de desacoplo de un puerto (o varios) del resto se habla de una unión (circuito) degenerada.

- Enuncie a modo de corollario las conclusiones prácticas que se pueden extraer de las demostraciones anteriores.

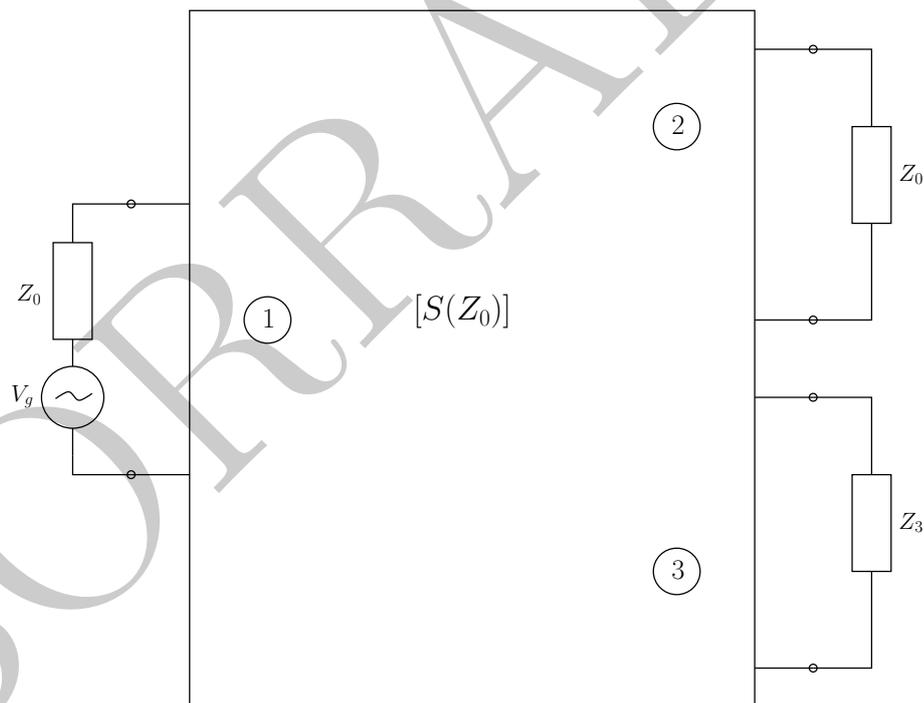
Por ejemplo: el diseño de un circuito de microondas que conste únicamente de tramos de líneas de transmisión debe renunciar al objetivo de adaptación simultánea de todas sus puertos.

Respuesta:

30. Considere un circuito (unión) de 3 accesos/puertas del que se conoce sus matriz de parámetros S referidos a la impedancia de referencia Z_0 , $[S(Z_0)]$:

$$[S(Z_0)] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

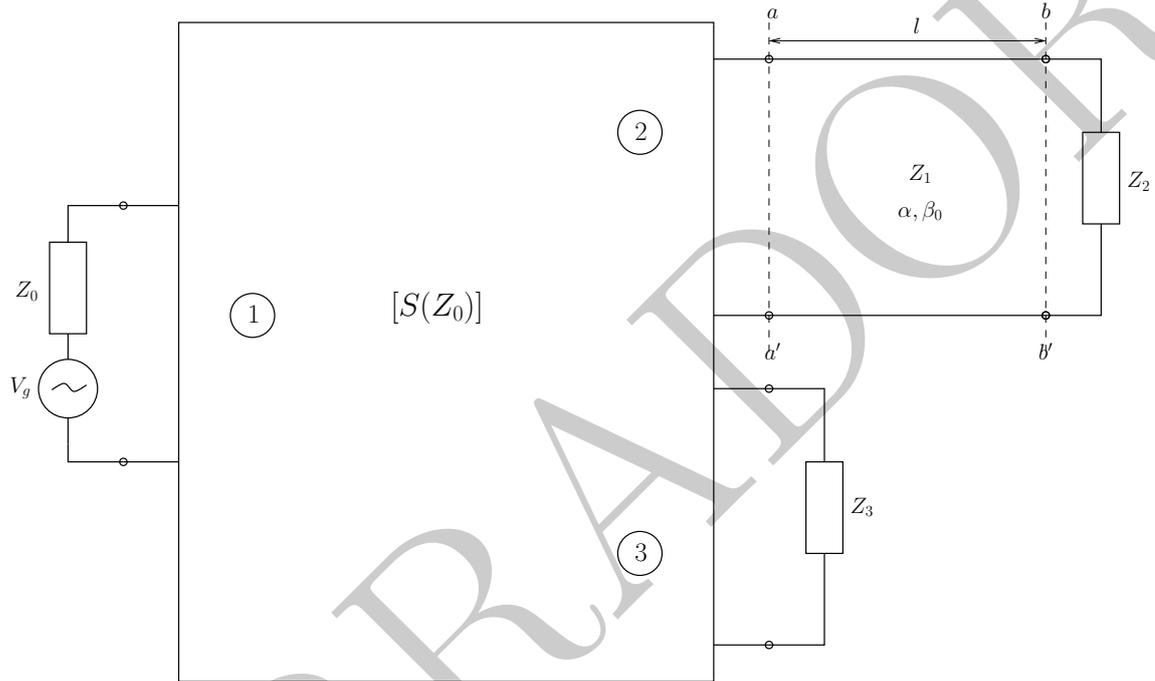
- a) ¿Se trata de una red recíproca? ¿Sin pérdidas? Justifique las respuestas.
- b) Indique (con un dibujo) una posible realización de dicha unión en tecnología *microstrip*.
 NOTA: No es necesario especificar valores numéricos de dimensiones, impedancias, etc. Sin embargo, el dibujo debe mostrar unas ciertas proporciones relativas.
- c) Considere la unión cargada de la siguiente forma. La puerta 3 tiene una impedancia $Z_3 = 2Z_0$ y la puerta 2 la impedancia Z_0 . La puerta 1 es excitada por un generador de impedancia interna Z_0 y potencia disponible de generador, P_{dg} , igual a 1 W.
 En dichas condiciones, calcule la ganancia de trasducción entre la puerta 2 (cargada con Z_0) y la entrada (puerto 1).



- d) Considere la unión excitada/cargada como en el apartado anterior pero con un tramo de línea de transmisión con pérdidas ($\alpha = 0.1 \text{ Np/cm}$) en la puerta 2. Considere el caso de

tramo de línea de longitud $l = \lambda/2$ e impedancia característica $Z_1 = Z_0$ terminada en una carga $Z_2 = Z_0$.

En dichas condiciones, y a partir del resultado del apartado anterior, calcule la ganancia de trasducción entre la carga Z_0 al final del tramo de línea de transmisión y la entrada por el puerto 1. Considere una frecuencia de 2 GHz y $\lambda = \lambda_0$ en la línea (λ_0 denota la longitud de onda en el vacío).



Respuesta:
