Mat II (GIB) - 3/4/2017 Prueba 1 (EC). 45 puntos (= 45 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 90 minutos**

TEST. (20 puntos) Tiempo 30 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +2.5 **Error -0.5** En blanco 0.

	SI	NO	
1.		x	Todo subconjunto no vacio de reales tiene supremo que además es único.
2.		x	Si a, b son irracionales, entonces $a^2 + b^3$ es irracional.
3.	x		Si el conjunto A es numerable y el conjunto B es no numerable, entonces $A \cup B$ es no numerable.
4.	x		Si $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ entonces $\dfrac{ab}{a^2+b^2} \leq \dfrac{1}{2}$.
5.	x		Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, entonces a es un punto de acumulación de $Dom(f)$.
6.	x		$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = e^4$.
7.		x	Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable y tiene un mínimo local en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.
8.		x	Si $f'(x) > 0$ para todo x de su dominio, entonces f es biyectiva.

Mat II (GIB) - 3/4/2017 **Prueba 1 (EC) Problemas. (25 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 60 minutos**

Comience sus respuestas EN ESTA HOJA.
Respuestas sin justificar recibiran muy poca o ninguna puntuación.

1. **(10 puntos)** Considere la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Estudie su continuidad y derivabilidad. Halle sus extremos si los hubiere y clasifíquelos. Construya una representación gráfica.

2. **(10 puntos)** Sea ahora la función

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   a) **(3 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
   b) **(3 puntos)** Razone por qué es posible extenderla por continuidad al cero y dé su extensión continua $h(x)$.
   c) **(4 puntos)** Es ¿$h(x)$ derivable en $\mathbb{R}$? Y si lo es, ¿es la función $h'(x)$ continua?.

3. **(5 puntos)** Dé un enunciado riguroso del teorema que dice que *"el límite de la suma de funciones es la suma de los límites"* y demuéstrelo.

SOLUCION:

1. Es claro que el dominio de f es $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ya que es composición de $\frac{1}{x}$ y la función exponencial; la primera tiene ese dominio, y su imagen está contenida en el dominio de la segunda. Por otro lado, al ser las funciones componentes continuas y derivables en dicho dominio, también f lo es. Ahora, por ser $Dom(f)$ un abierto de $\mathbb{R}$, y f derivable en todo su dominio, los extremos, de existir, habrán de ser puntos críticos. Pero,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},$$

que no se anula en $Dom(f)$, por lo que no hay extremos. También observamos que la función f es decreciente en cada subintervalo $x < 0$, $0 < x$ de su dominio. Además,

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\left(2 + \tfrac{1}{x}\right) \equiv A(x)B(x).$$

Claramente, el primer factor $A(x)$ tiene el mismo signo que x y no se anula, mientras que para el segundo tenemos:

$$\left(2 + \tfrac{1}{x}\right) \begin{cases} > 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ = 0 & \text{si } x = -\frac{1}{2} \\ < 0 & \text{si } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ > 0 & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

Por tanto, tendremos que

$$\begin{cases} (A(x) < 0 \wedge B(x) > 0) \text{ si } x < -\frac{1}{2} & \Rightarrow f''(x) < 0 \\ (A(x) < 0 \wedge B(x) = 0) \text{ si } x = -\frac{1}{2} & \Rightarrow f''(x) = 0 \\ (A(x) < 0 \wedge B(x) < 0) \text{ si } -\frac{1}{2} < x < 0 & \Rightarrow f''(x) > 0 \\ (A(x) > 0 \wedge B(x) > 0) \text{ si } 0 < x. & \Rightarrow f''(x) > 0. \end{cases}$$

Así, como f'' es continua para $x < 0$ ha de haber un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$, siendo, por tanto, f cóncava hacia abajo para $x < -\frac{1}{2}$ y cóncava hacia arriba para $x > -\frac{1}{2}$.

Estudiemos ahora las asíntotas. Comencemos observando que el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ implica:

$$\begin{cases} x \to -\infty & \Rightarrow t \to 0^- \\ x \to 0^- & \Rightarrow t \to -\infty \\ x \to 0^+ & \Rightarrow t \to +\infty \\ x \to +\infty & \Rightarrow t \to 0^+. \end{cases}$$

Puesto que se dan las hipótesis del teorema de composición del límite, podemos calcular los que nos interesan de la siguiente forma:

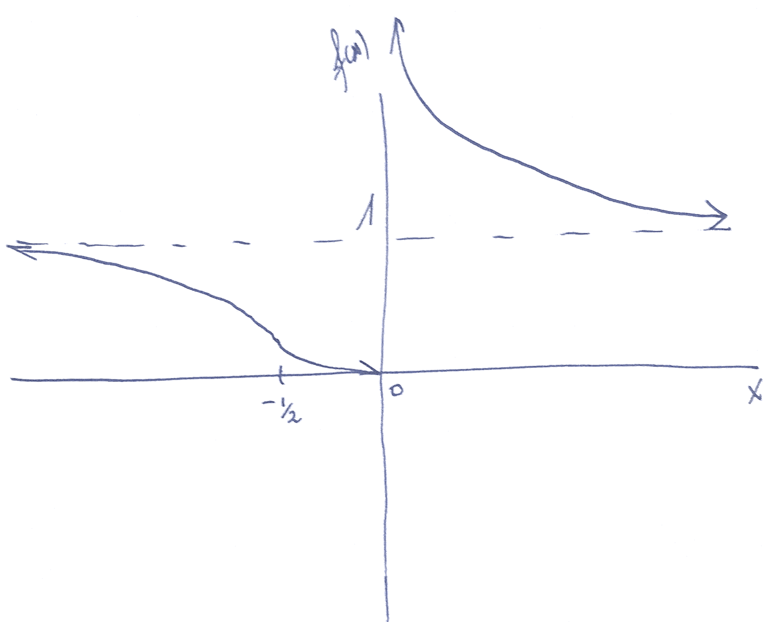
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = & \lim\limits_{t\to 0^-} e^t = 1; \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = & \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0; \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = & \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty; \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = & \lim\limits_{t\to 0^+} e^t = 1. \end{cases}$$

Como $f(x) \to 0,\ x \to 0^-$, para poder dibujar correctamente la gráfica, estudiemos con qué pendiente lo hace. Ello significa estudiar $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, ya que f' es continua para $x < 0$.

Calculemos, sin perdida de generalidad $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. Se trata de una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$" y dado que se cumplen las hipótesis del teorema de L'Hôpital, podemos aplicarlo. Observemos, sin embargo, que al derivar el numerador siempre obtendremos un factor x^{-2}, mientras que al derivar el denominador sólo disminuiremos su exponente en una unidad, con lo que su grado aumentará en cada aplicación del teorema. Así, aplicar L'Hôpital, sin más, estará abocado al fracaso. Pero, observemos también que podemos escribir nuestra expresión como $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}}$. Ahora tenemos una indeterminación del tipo "$\frac{+\infty}{+\infty}$" a la que de nuevo podemos aplicar L'Hôpital; pero ahora al derivar, las potencias de numerador y denominador podrían compensarse. En efecto, es así:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{6}{x^4}}{\frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}} = 6 \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$. Ya podemos construir una representación gráfica de f que tendría este aspecto:



2. Es claro, a partir de la definición, que el dominio $Dom(g)$ es de nuevo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. .

a) Como g coincide con f en $(-\infty,0)$, ya sabemos por el ejercicio anterior, que es continua y derivable en este conjunto. En cuanto al subconjunto $(0,+\infty)$, la función dada es derivable, y por tanto continua, pues se trata del producto de una función derivable, x^2, multiplicada por la composición de funciones derivables, sen y $(\frac{1}{x})$. Así, g es derivable, y por tanto continua, en su dominio.

b) Obviamente, $0 \notin Dom(g)$, pero es un punto de acumulación de este conjunto, por lo que cabe hablar de $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Para que g pueda extenderse a $x=0$ deberá de existir dicho límite y para que la extensión h sea continua en 0 deberemos definir $h(0)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Que el límite existe por la izquierda, ya lo sabemos del ejercicio anterior, pues

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

El límite por la derecha será, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$. Pero este límite es cero, ya que para $x>0$:

$$0 \leq |g(x)| = \left|x^2 \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})\right| \leq \left|x^2\right| \to 0,\ x\to 0^+,$$

que, por el teorema del "sandwich" implica $|g(x)|\to 0$, $x\to 0^+$, y por tanto: $g(x)\to 0$, $x\to 0^+$. También podríamos haber razonado que este límite ha de ser cero, ya que se trata del producto de un infinitésimo, $x^2=o(x)=o(1)$, $x\to 0$, por una función localmente acotada en cero, $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ (de hecho, globalmente acotada en su dominio).

Puesto que ambos límites existen y coinciden, tendremos finalmente que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. Al existir este límite, es posible extender g por continuidad al cero. Así, la función continua h que lo hace es:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

c) Como h coincide con g en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ y ésta era derivable en ese conjunto, h también lo es. Queda por estudiar el origen. Para que h sea derivable en $x=0$ deberá de existir $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{h(0+\delta)-h(0)}{\delta}$, es decir, hemos de estudiar

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{h(0+\delta)-h(0)}{\delta} = \begin{cases} \text{para } \delta<0,\ \lim\limits_{\delta\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{\delta}}}{\delta} \\ \\ \text{para } \delta>0,\ \lim\limits_{\delta\to 0^+}\dfrac{\delta^2\operatorname{sen}(\frac{1}{\delta})}{\delta}. \end{cases}$$

El primer límite es cero, ya que $|\delta|<1 \Rightarrow \delta^2<|\delta|$, y entonces, para $-1<\delta<0$ se tendrá:

$$0 \leq \left|\frac{e^{\frac{1}{\delta}}}{\delta}\right| = \frac{e^{\frac{1}{\delta}}}{|\delta|} \leq \frac{e^{\frac{1}{\delta}}}{\delta^2} \to 0,\ \delta\to 0^-,$$

como se vió al final del ejercicio 1. También podríamos haber calculado el límite mediante el teorema de L'Hôpital, con las mismas salvedades que antes. Así:

$$\lim_{\delta\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{\delta}}}{\delta} = \lim_{\delta\to 0^-}\frac{\frac{1}{\delta}}{e^{-\frac{1}{\delta}}} = \lim_{\delta\to 0^-}\frac{-\frac{1}{\delta}^2}{-\frac{1}{\delta}^2 e^{-\frac{1}{\delta}}} = \lim_{\delta\to 0^-} e^{\frac{1}{\delta}} = 0.$$

El segundo límite es también cero, pudiéndose razonar de manera análoga como lo hicimos antes.

Con todo ello conclu'imos que la función h es derivable en todo $\mathbb{R}$, siendo su derivada

$$h'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

d) La función h' es, explícitamente:

$$h'(x) = \begin{cases} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \left(x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right)' = 2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Puesto que $x = 0$ es un punto de acumulación del dominio de h', para que ésta sea continua en dicho punto debe de existir el límite $\lim_{x\to 0} h'(x)$ y coincidir con el valor $h'(0) = 0$. Sin embargo, es claro a partir de la expresión explícita de h' anterior, que el límite $\lim_{x\to 0^+} h'(x)$ no existe, pues la función $\cos(\frac{1}{x})$ no tiene límite cuando $x \to 0^+$.

Así, la función h' no es continua en $x = 0$, y por tanto, no lo es en $\mathbb{R}$. Sin embargo, es fácil razonar que sí lo es en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

3. Existen diversas variantes, más o menos generales, del teorema referido. Aquí daremos la más habitual:

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Sean también $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = F \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = G \in \mathbb{R}$. Entonces, la función $f + g : A \to \mathbb{R}$ tiene límite en a, y éste vale $F + G$, es decir:

$$\lim_{x\to a}(f + g)(x) = F + G.$$

Demostración:

Pueden darse diversas demostraciones de este resultado. Aquí daremos dos.

La primera se basa en el hecho de que $\lim_{x\to a} f(x) = F \in \mathbb{R}$ si y sólo si se puede escribir $f(x) = F + \alpha(x)$, donde $\alpha(x) = o(1)$, $x \to a$, es decir α es un infinitésimo en a. Haciendo lo mismo con g, tendremos que $g(x) = G + \beta(x)$, con $\beta(x) = o(1)$, $x \to a$. Por tanto,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = F + \alpha(x) + G + \beta(x) = (F + G) + \alpha(x) + \beta(x) = (F + G) + \gamma(x),$$

siendo $\gamma(x) \equiv \alpha(x)+\beta(x) = o(1)$, $x \to a$, también un infinitésimo en a. Esto implica $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = F+G$. ■

Que la suma de dos infintésimos sobre la misma base es de nuevo un infinitésimo podría probarse, si se desea, modificando trivialmente la demostración ϵ, δ que sigue a continuación.

La segunda será la clásica demostración ϵ, δ. Por ser $\lim_{x\to a} f(x) = F \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists \delta_1 > 0 \mid \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon_1.$$

Análogamente, por ser $\lim_{x\to a} g(x) = G \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists \delta_2 > 0 \mid \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon_2.$$

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tomemos un δ_1 que corresponda a $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, y un δ_2 que corresponda a $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, definiendo $\delta \equiv \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tendremos que si $(x \in A) \wedge 0 < |x - a| < \delta$, se cumplirá que

$$|(f + g)(x) - (F + G)| = |(f(x) - F) + (g(x) - G)| \leq |f(x) - F| + |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ ■$$
