

Apellidos.....
 Nombre..... DNI Grupo

Nota (1 decimal)

Esta prueba supondrá **1,5 puntos** de la calificación final de los alumnos de evaluación continua.

Consta de un test (**0.3 puntos**), una pregunta de respuesta corta (**0.2 puntos**) y un ejercicio (**1 punto**).

TEST (0.3 PUNTOS)

- El test consta de **3 preguntas**. Marque con una cruz a lo sumo una opción por pregunta.
- **Acierto +0,1 Error -0,04 Blanco 0.**

V F

1. La inequación real $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$ se verifica si y sólo si $x \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x^2)} = 0$.

3. Si una función f alcanza un mínimo relativo en el punto a , entonces la función es derivable en a y su derivada es $f'(a) = 0$.

PREGUNTA DE RESPUESTA CORTA (0,2 PUNTOS)

- **Acierto +0,2 Error 0 Blanco 0.**

¿Cuál es el grado del polinomio de Taylor mínimo que se necesita para aproximar el número e con un error menor que 0,1? (Indicación: $2,4 < e < 3$)

3



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

EJERCICIO (1 PUNTO)

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < -2, \\ 2 - (x + 2)^2, & \text{si } -2 \leq x < -1, \\ |x|, & \text{si } -1 \leq x. \end{cases}$$

- a) [0,2 puntos] Estudie si f es continua en \mathbb{R} .
- b) [0,2 puntos] Estudie si f derivable en \mathbb{R} .
- d) [0,6 puntos] Estudie los máximos y mínimos relativos y absolutos de f en \mathbb{R} .
- a) Estudie si f es continua en \mathbb{R} .

La función f es una función definida a trozos, que es continua en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$ y $(-1, \infty)$, por ser, en el primer caso, la función exponencial (continua en todo su dominio), en el segundo una función polinómica, y en el último la función valor absoluto (continuas también en todo su dominio).

Sólo nos queda estudiar la continuidad en los extremos de los intervalos, es decir, en $x = -2$ y en $x = -1$. Para esto estudiamos si la función tiene límite en esos puntos, a través de los límites laterales, y vemos si el límite, caso de que exista, es igual al valor de la función en el punto.

Estudiamos los límites laterales en $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} e^x = e^{-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2 - (x + 2)^2 = 2$$

Los límites laterales en $x = -2$ son distintos, luego no existe el límite, y la función no es continua en $x = -2$.

Estudiamos ahora los límites laterales en $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2 - (x + 2)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} |x| = 1$$

Luego el $\lim_{x \rightarrow -1} = 1 = f(-1)$. Por tanto, $f(x)$ es continua en $x = -1$.

Entonces $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$.

- b) Estudie si f derivable en \mathbb{R} .

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $f(x) = e^x$, que es derivable en todo su dominio, en el intervalo $(-2, -1)$, $f(x) = 2 - (x + 2)^2$, que es derivable en todo su dominio, y en el intervalo $(-1, \infty)$, $f(x) = |x|$, que es derivable en todo su dominio excepto en $x = 0$. Por tanto $f(x)$ no es derivable en $x = 0$, ni en $x = -2$ por no ser continua, y nos queda por estudiar cuando $x = -1$. Para ello estudiamos las derivadas laterales en $x = -1$.

Entonces $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-2, -1, 0\}$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

d) Estudie los máximos y mínimos relativos y absolutos de f en \mathbb{R} .

Los candidatos a extremos son los puntos donde la función no es derivable $(-2, -1, 0)$, los extremos del dominio de definición (en este caso no hay) y los puntos donde se anule la primera derivada (tampoco hay).

Estudiamos los tres candidatos a extremos:

- $x = -2$

En $x=-2$ hay un salto positivo de e^{-2} a $f(-2) = 2$; además, la derivada es negativa cuando nos alejamos de $x = -2$ por la derecha ($f'(x) = -2x - 4$, si $-2 < x < -1$), por lo que tenemos un máximo relativo en $x = -2$.

- $x = -1$

La primera derivada es negativa cuando nos acercamos a $x = -1$ por la izquierda ($f'(x) = -2x - 4$, si $-2 < x < -1$), y sigue siendo negativa cuando nos alejamos de $x = -1$ por la derecha ($f'(x) = -1$, si $-1 < x < 0$). Luego en $x = -1$ la función $f(x)$ no alcanza extremo.

- $x = 0$

La primera derivada es negativa cuando nos acercamos a $x = 0$ por la izquierda ($f'(x) = -1$, si $-1 < x < 0$), y es positiva cuando nos alejamos de $x = 0$ por la derecha ($f'(x) = 1$, si $0 < x$). Luego en $x = 0$ tenemos un mínimo relativo.

Estudiamos si alguno de los extremos puede ser absoluto. Para ello estudiamos los límites de $f(x)$ en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty$$

Además $f(x)$ no toma valores negativos en ningún punto de \mathbb{R} .

Luego tenemos un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo absoluto en $x = 0$.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow and orange gradient bar at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70