Relación 2 de problemas: Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Problema de Valor Inicial

Grado en Ingeniería de Organización Industrial: MM Aplicados a la Industria

Curso 2018/2019

1. Sea dado el PVI

$$\begin{cases} y'(t) = (1+6t)e^{1-y} - 6, \quad \forall\, t \in (0,6] \\ y(0) = \ln(10) + 1 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \ln\left(10e^{-6t} + t\right) + 1$$

(a) Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal $[0,6]$ con pasos de discretización $h_1 = 0.5$, $h_2 = 0.15$ y $h_3 = 0.25$.

(b) Dibujar la solución analítica junto con las soluciones calculadas anteriormente.

2. Sea dado el PVI

$$\begin{cases} y'(t) = y - \dfrac{t}{y}, \quad \forall\, t \in (0,5] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{14e^{2t} + 4t + 2}$$

(a) Aplicar el algoritmo de Euler Explícito para calcular la solución en el intervalo temporal $[0,5]$ con paso de discretización $h = 0.2$.

(b) Dibujar la solución analítica junto con la solución calculada anteriormente.

(c) Utilizar el resultado obtenido para proximar el valor de la solución analítica en el instante $t = 3.6$ y calcular el error cometido.

3. Se considera el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = -kt^{\beta}y, & t \in [0,4] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

donde $k = 4$ y $\beta = 0.25$. La solución exacta del PVI viene dada por la función

$$y(t) = e^{-\frac{k}{\beta+1}t^{\beta+1}}$$

   (a) Resolver el PVI utilizando los métodos de Euler explícito, Runge-Kutta 2 y Runge-Kutta 4, utilizando para ello los siguientes pasos de discretización: $h_1 = 0.5$, $h_2 = 0.4$, $h_3 = 0.2$ y $h_4 = 0.1$.

   (b) Dibujar la solución analítica junto con las soluciones calculadas anteriormente para cada uno de los métodos considerados con $h = 0.5$ y $h = 0.2$, respectivamente.

4. Se considera el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{t+1}, & t \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

con solución exacta $y(t) = (t+1)^2$.

   (a) Resolver el PVI utilizando los métodos de Euler explícito, Runge-Kutta 2 y Runge-Kutta 4 tomando un paso de discretización $h = 0.1$.

   (b) Dibujar las soluciones obtenidas con los tres métodos y la solución exacta en una misma gráfica.

   (c) Obtener el valor aproximado de la solución en $t = 1$ y el error cometido, comparando los resultados obtenidos en cada uno de los métodos.

5. Sea dado el PVI

$$\begin{cases} y'(t) = (t-1)(y-y^2), & \forall\, t \in (0,2] \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

cuya solución analítica es:

$$y(t) = \frac{e^{(1/2)t^2-t}}{1+e^{(1/2)t^2-t}}$$

   (a) Aplicar el algoritmo de Euler Explícito, Runge-Kutta 2 y Runge-Kutta 4 para calcular la solución en el intervalo temporal $[0,2]$ con paso de discretización $h = 0.04$.

(b) Dibujar las soluciones obtenidas con los tres métodos y la solución exacta en una misma gráfica.

(c) Obtener el valor aproximado de la solución en $t = 2$ y el error cometido, comparando los resultados obtenidos en cada uno de los métodos.