1 Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de un sistema lineal es la respuesta estacionaria del sistema a una señal de entrada sinusoidal (Fig. 1).

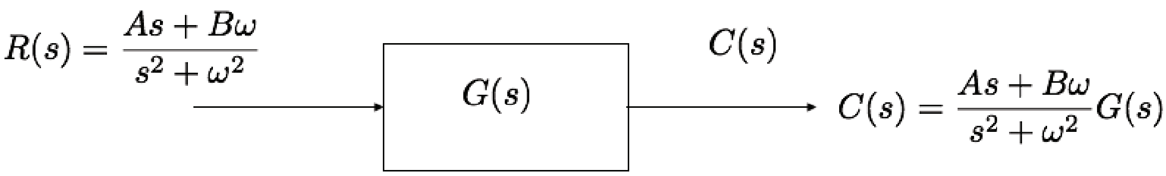

Figure 1: Respuesta en frecuencia de un sistema con función de transferencia $G(s)$

La respuesta estacionaria de un sistema lineal a una entrada sinusoidal es una respuesta sinusoidal de la misma frecuencia que la señal de entrada pero diferente amplitud y fase. La amplitud y la fase de la salida son una función de la frecuencia.

Ejemplo 1 Encontrar la respuesta del sistema $G(s) = \frac{1}{s+2}$ a una entrada sinusoidal $r(t) = A\cos\omega t$

Para encontrar la respuesta en frecuencia hacemos $s = j\omega$:

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad \Longrightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \tag{1}$$

Buscamos módulo ($|G(j\omega)|$) y fase (ϕ) de la función de transferencia compleja. Y estudiamos la respuesta en frecuencia dibujando el módulo y la fase de G en función de $\log\omega$:

$$\text{módulo} \longrightarrow \ |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}} \tag{2}$$

$$\text{fase} \longrightarrow \ \phi = \arctan\left(-\frac{\omega}{2}\right) \tag{3}$$

Y la respuesta temporal para una entrada sinusoidal $r(t) = A\cos\omega t$ está dada por

$$c(t) = A\ (\text{módulo})\ \cos(\omega t + \phi) \tag{4}$$

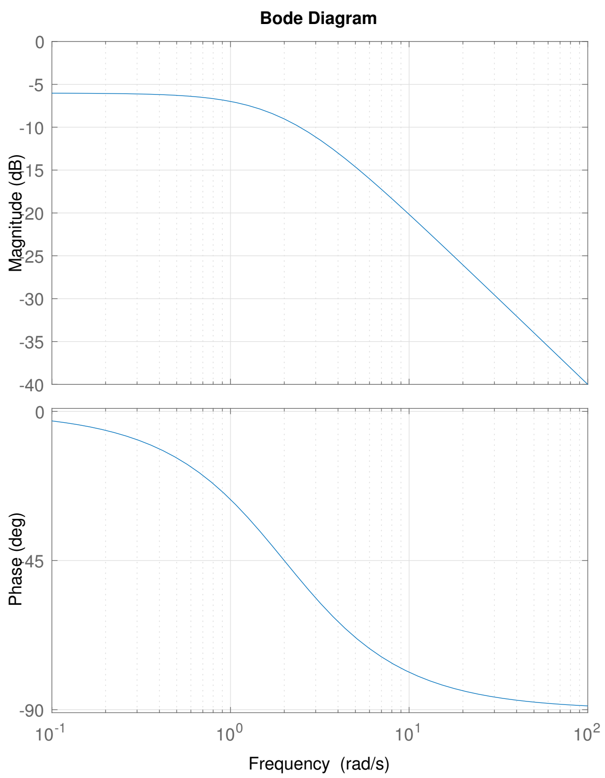

Figure 2: Diagrama de Bode (magnitud y fase) para el sistema $G(s) = \frac{1}{s+2}$

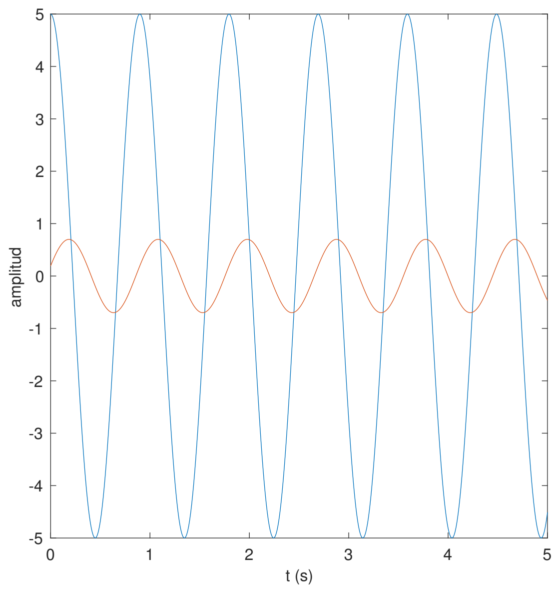

Figure 3: Input sinusoidal $r(t) = 5\cos(7t)$ (curva en azul) y respuesta temporal estacionaria del sistema $G(s) = \frac{1}{s+2}$ a esa entrada (curva en rojo). La expresión de la respuesta estacionaria es $c(t) = 5 * 0.14\cos(7t - 1.29)$

Ejemplo 2: respuesta en frecuencia de un compensador de adelanto La función de transferencia de un compensador de adelanto está dada por

$$D_{lead}(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \alpha < 1 \tag{5}$$

La Fig. 4 muestra el diagrama de Bode para $K = 1$, $T = 1$, $\alpha = 0.1$ en el rango de frecuencia $0.01 \leq \omega \leq 1000$. La función de transferencia del compensador es

$$D_{lead}(s) = 10\frac{s+1}{s+10} \tag{6}$$

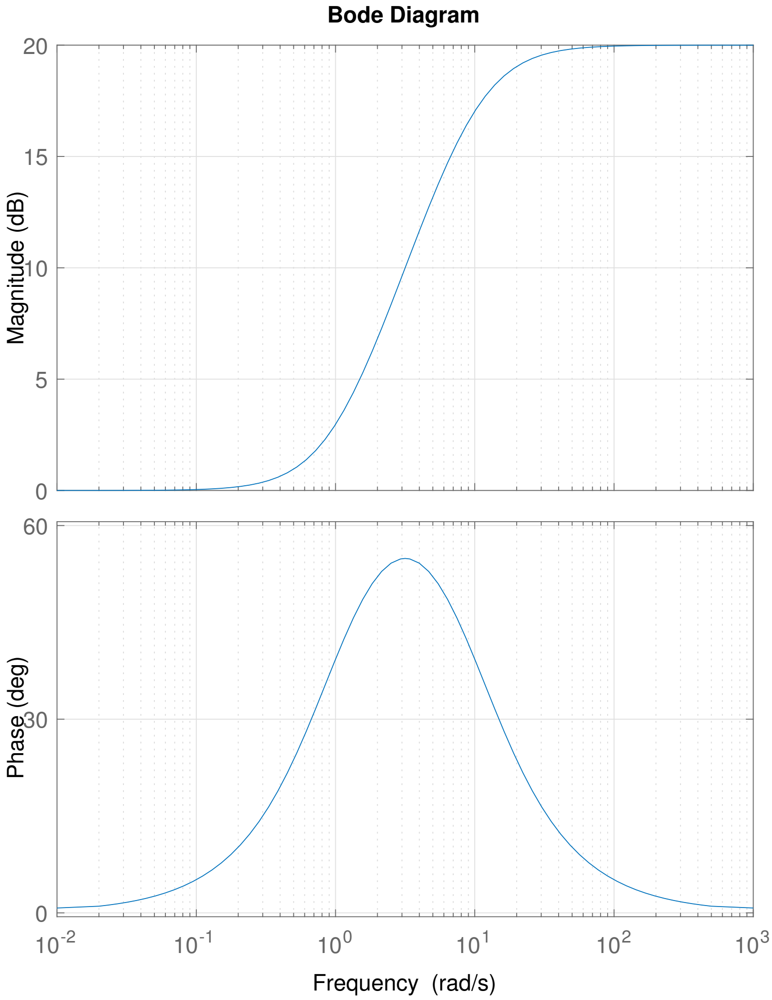

Figure 4: Diagrama de Bode (magnitud y fase) para el compensador de adelanto $D_{lead}(s) = 10\frac{s+1}{s+10}$

La Fig. 5 compara la respuesta en frecuencia de un compensador de adelanto y de uno de retardo.

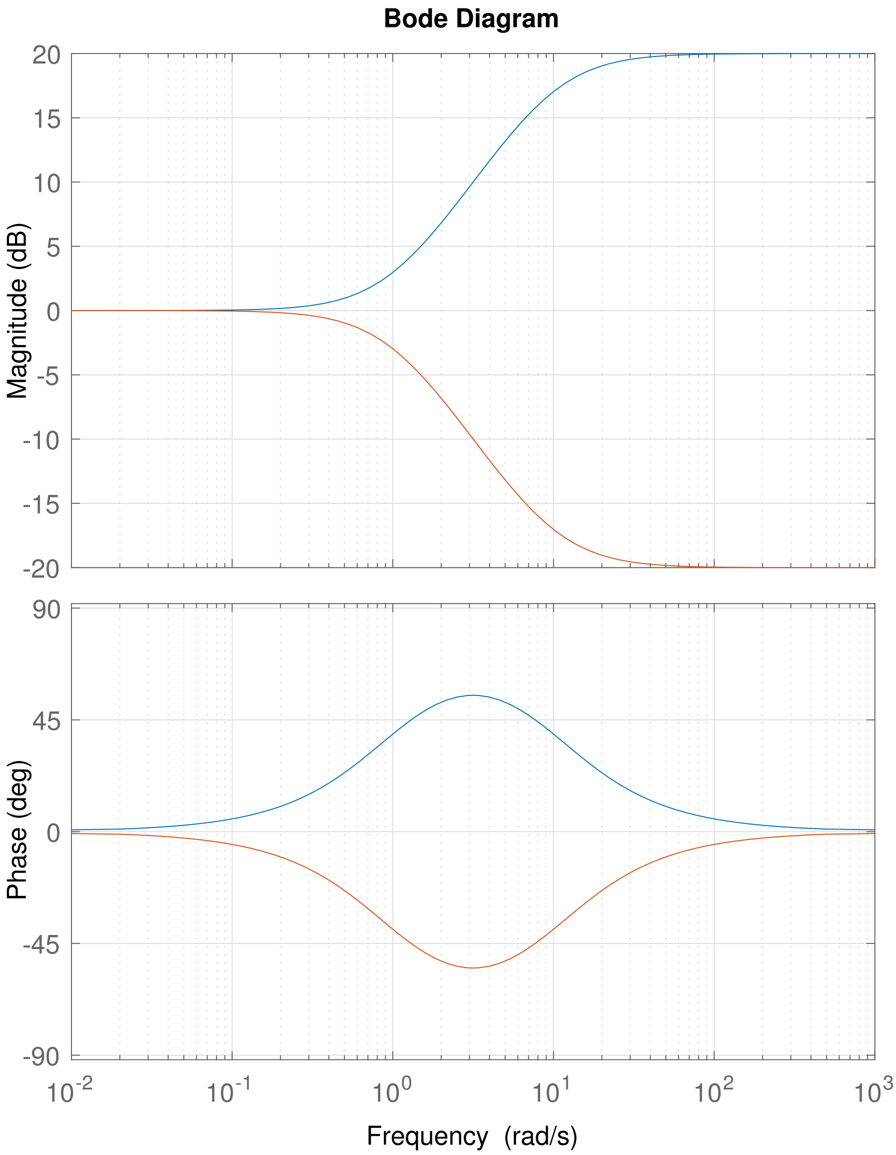

Figure 5: Diagrama de Bode (magnitud y fase) para el compensador de adelanto $D_{lead}(s) = 10\frac{s+1}{s+10}$ (curva azul) y para el compensador de retardo $D_{lag}(s) = 0.1\frac{s+10}{s+1}$

Ejemplo 3: diagrama de Bode de sistema con polos y ceros reales La Fig. 6 muestra el diagrama de Bode para el sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{2000(s+0.5)}{s(s+10)(s+50)} \tag{7}$$

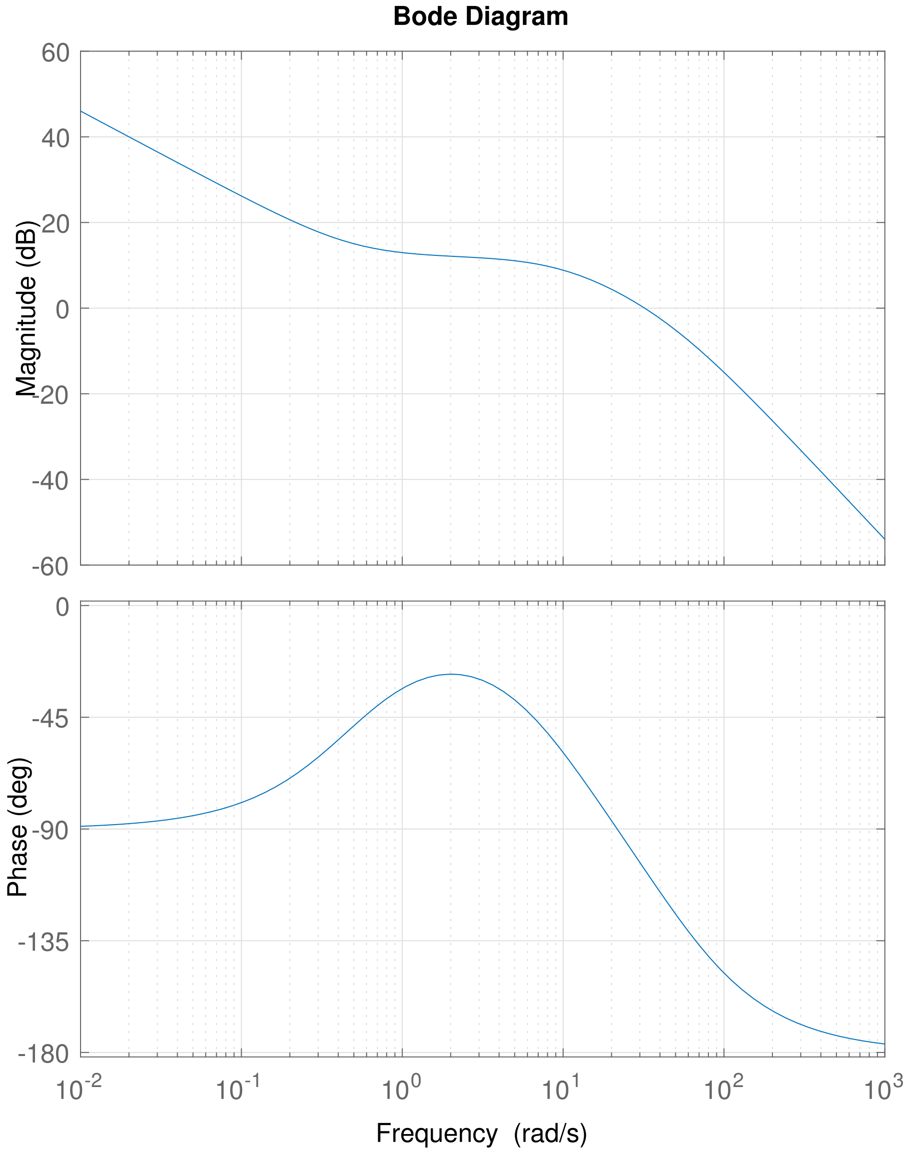

Figure 6: Diagrama de Bode (magnitud y fase) para el sistema $G(s) = \frac{2000(s+0.5)}{s(s+10)(s+50)}$

2 Estabilidad

Suponemos que la función de transferencia de lazo cerrado es conocida. Podemos determinar la estabilidad del sistema factorizando el denominador....Sin embargo, la función de transferencia de lazo cerrado no se conoce normalmente. Precisamente, la finalidad detrás de la técnica del lugar de las raíces es encontrar los factores del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado conocida únicamente la función de transferencia de lazo abierto. Otra forma de determinar la estabilidad de lazo cerrado es evaluar la respuesta en frecuencia de la función de lazo abierto (no es necesario, por tanto, factorizar el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado).

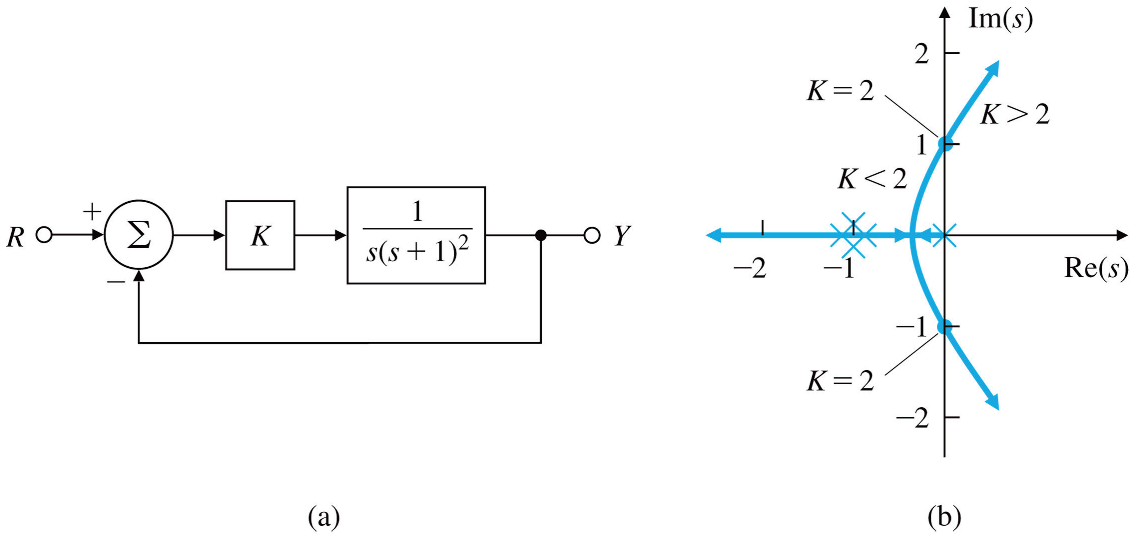

Figure 7: (a) Sistema con realimentación unidad; (b) Lugar de las raíces

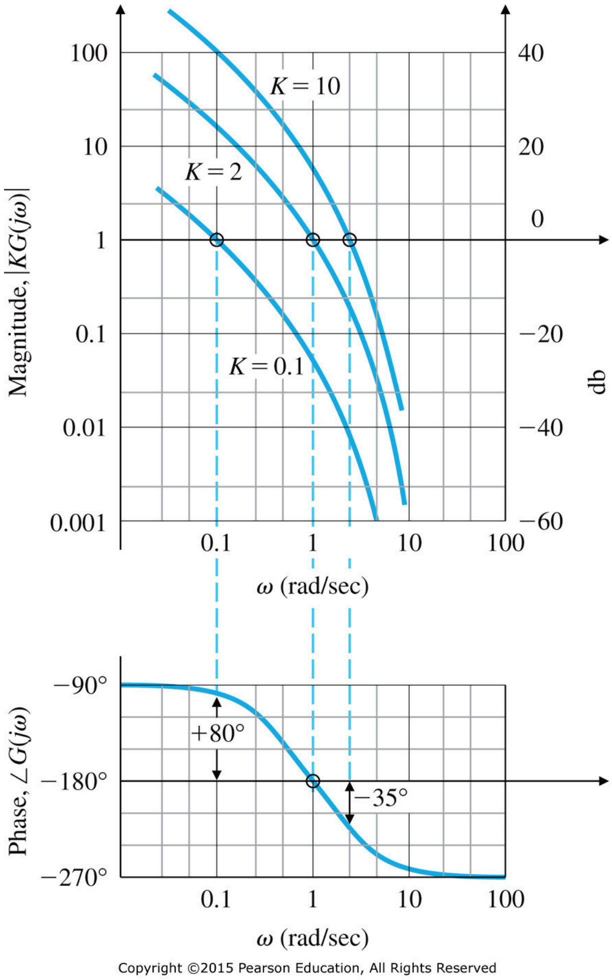

Figure 8: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del sistema de la Fig. 7. (Diagrama de Bode de $KG(s)$).

3 Criterio de estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist relaciona la respuesta en frecuencia de lazo abierto con el número de polos de sistema de lazo cerrado en el semiplano derecho (RHP).

La evaluación de cómo se comporta la función de lazo abierto $KG(s)$ se utiliza para determinar la estabilidad del sistema de lazo cerrado, (Fig. 9 y Fig. 10).

El procedimiento para determinar la estabilidad mediante el criterio de Nyquist:

1. Dibujar el diagrama de Nyquist (o diagrama polar) de lazo abierto
2. Evaluar el número de encierres de -1 en el sentido de las agujas del reloj. Este número es N. Encierres en la dirección contraria a las agujas del reloj suponen valores de N negativos.
3. Determinar el número de polos de la función de lazo abierto en el semiplano derecho. Este número es P.
4. Determinar el número de polos del sistema de lazo cerrado en el semiplano derecho, Z, a partir de

$$Z = N + P \tag{8}$$

Para estabilidad se requiere $Z = 0$

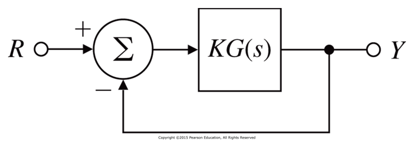

Figure 9: Diagrama de bloques para $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$.

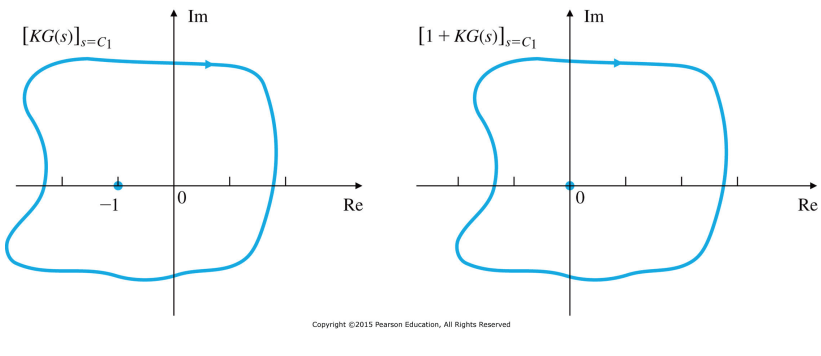

Figure 10: Diagramas de Nyquist: evaluación de $KG(s)$ y de $1 + KG(s)$.

Principio argumental: Un contorno de una función compleja encierra el origen $Z - P$ veces, donde Z es el número de ceros y P es el número de polos de la función en el contorno.

Ejemplo: estabilidad mediante criterio de Nyquist Determinar la estabilidad del sistema de la Fig. 11

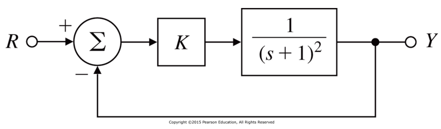

Figure 11: Sistema de control para estudio de estabilidad mediante criterio de Nyquist.

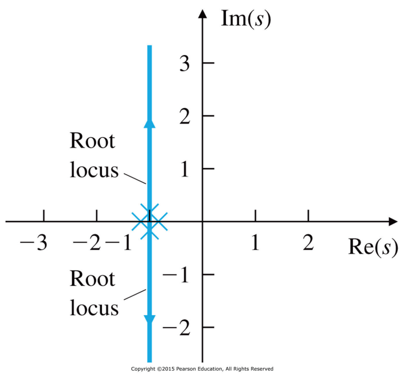

Figure 12: Lugar de las raíces del sistema de la Fig. 11.

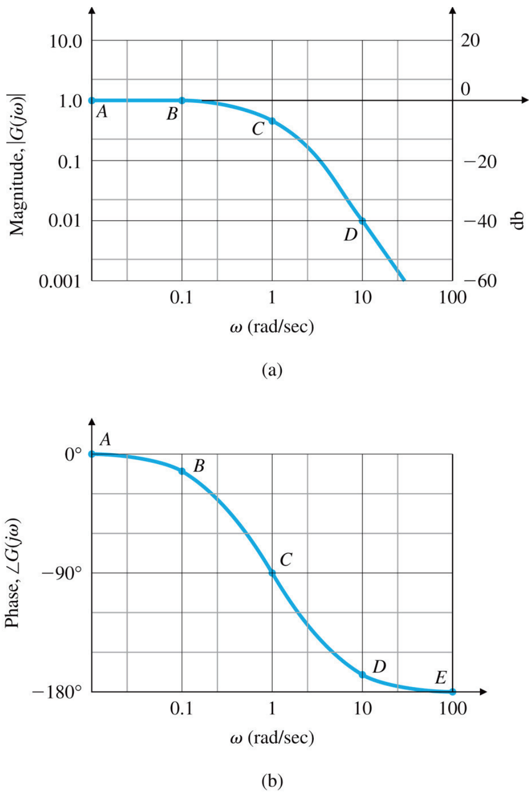

Figure 13: Diagrama de Bode de $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$.

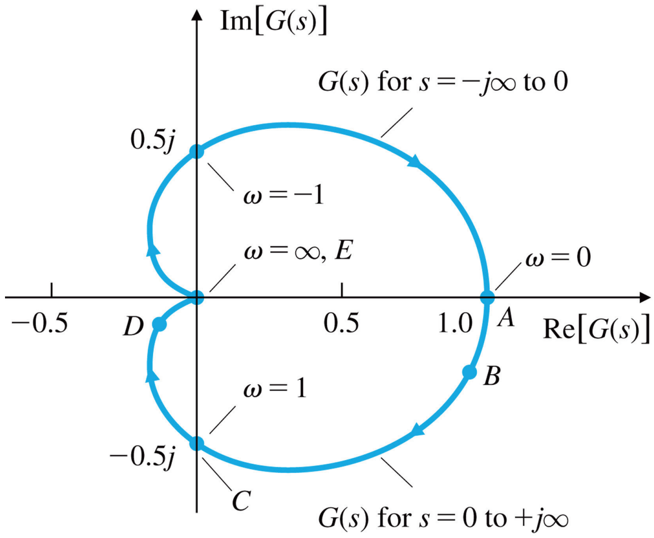

Figure 14: Diagrama de Nyquist de $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ para la evaluación de estabilidad.

4 Márgenes de estabilidad

Margen de ganancia (GM) es el factor por el cual se puede incrementar (en algunos casos disminuir) la ganancia antes de que el sistema se convierta en inestable. Se puede leer directamente en el diagrama de Bode, Fig. 15, midiendo la distancia vertical entre la curva $|KG(j\omega)|$ y la línea de magnitud 1 a la frecuencia a la que la fase de $G(j\omega)$ es -180°. El término frecuencia de corte o de transición (crossover frequency) se utiliza para referirse a la frecuencia a la que la magnitud es 1 (0 dB).

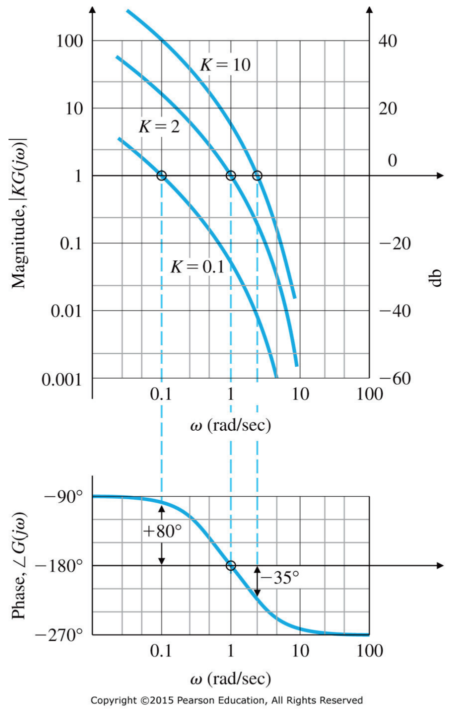

Figure 15: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del sistema de la Fig. 7. (Diagrama de Bode de $KG(s)$).

Margen de fase (PM) es la cantidad por la que la fase de $G(j\omega)$ supera -180° cuando $|KG(j\omega)| = 1$

Los márgenes de estabilidad también pueden definirse a partir del diagrama de Nyquist, Fig. 16

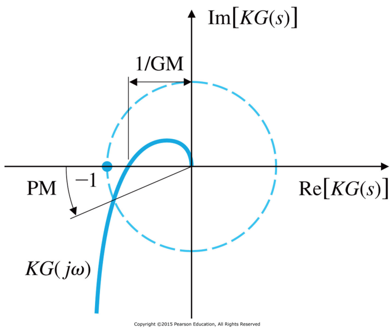

Figure 16: Diagrama de Nyquist para definir márgenes de ganancia y de fase.