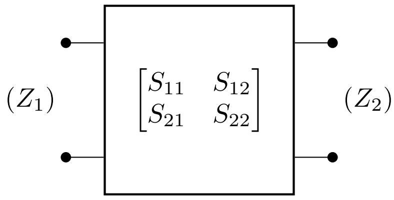
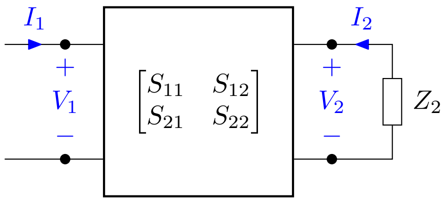
Cálculo de parámetros S

Objetivo: cálculo de parámetros de scattering de una red de dos puertos con impedancias de referencia Z_1 y Z_2, respectivamente.



Método general

Cálculo de S_{11} y S_{21}, cargando el puerto 2 con su impedancia de referencia Z_2 ($a_2 = 0$).



$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{(V_1 - Z_1 I_1)/\sqrt{8Z_1}}{(V_1 + Z_1 I_1)/\sqrt{8Z_1}} = \frac{V_1 - Z_1 I_1}{V_1 + Z_1 I_1}$$

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{(V_2 - Z_2 I_2)/\sqrt{8Z_2}}{(V_1 + Z_1 I_1)/\sqrt{8Z_1}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\,\frac{V_2 - Z_2 I_2}{V_1 + Z_1 I_1}$$

Ecuaciones:

- $V_1 = Z_{\text{in}1} I_1$ (por definición de $Z_{\text{in}1}$).
- $V_2 = -Z_2 I_2$ (ya que $a_2 = 0$).
- $V_1 \leftrightarrow V_2$, o bien $I_1 \leftrightarrow I_2$.

De donde resulta:

$$S_{11} = \frac{Z_{\text{in}1} - Z_1}{Z_{\text{in}1} + Z_1}$$

$$S_{21} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\,\frac{-2Z_2}{Z_{\text{in}1} + Z_1}\,\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\,\frac{2Z_{\text{in}1}}{Z_{\text{in}1} + Z_1}\,\frac{V_2}{V_1}$$

Como puede observarse, sólo hay que calcular la impedancia de entrada $Z_{\text{in}1}$ y la relación entre tensiones V_2/V_1 o entre corrientes I_2/I_1.

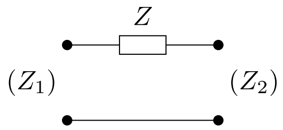
Alternativamente, se puede despejar $Z_{\text{in}1}$ en función de S_{11} y reescribir S_{21} en función de S_{11} y, nuevamente, la relación entre tensiones o corrientes.

$$S_{21} = (S_{11} - 1)\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}\,\frac{I_2}{I_1} = (S_{11} + 1)\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\,\frac{V_2}{V_1}$$

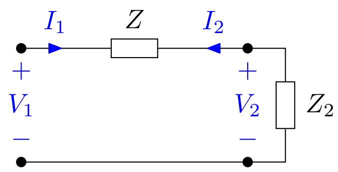
Repítase para S_{22}, S_{12} cargando el puerto 1 con su impedancia de referencia Z_1 ($a_1 = 0$).

- Si la red es recíproca, $S_{12} = S_{21}$, por lo que sólo es necesario calcular $Z_{\text{in}2}$ para obtener S_{22},
$$S_{12} = \frac{Z_{\text{in}2} - Z_2}{Z_{\text{in}2} + Z_2}.$$
- Si la red es además simétrica, $S_{11} = S_{22}$ y no hace falta ningún cálculo adicional.
- En algunas otras ocasiones es posible reutilizar los cálculos si la red, aún no siendo simétrica, presenta simetría en su estructura aunque no en los valores de sus elementos.

Ejemplo 1: impedancia en serie



En este caso $Z_{\text{in}1} = Z + Z_2$ y $I_1 = -I_2$.



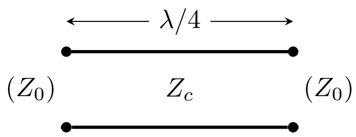
La red es recíproca pero no simétrica, pero intercambiar los puertos 1 y 2 es equivalente a intercambiar las impedancias Z_1 y Z_2. Por tanto

$$S_{11} = \frac{Z - Z_1 + Z_2}{Z + Z_1 + Z_2}$$
$$S_{22} = \frac{Z + Z_1 - Z_2}{Z + Z_1 + Z_2}$$
$$S_{21} = S_{12} = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z + Z_1 + Z_2}$$

y la matriz de scattering completa es

$$[S] = \frac{1}{Z + Z_1 + Z_2}\begin{bmatrix} Z - Z_1 + Z_2 & 2\sqrt{Z_1 Z_2} \\ 2\sqrt{Z_1 Z_2} & Z + Z_1 - Z_2 \end{bmatrix}.$$

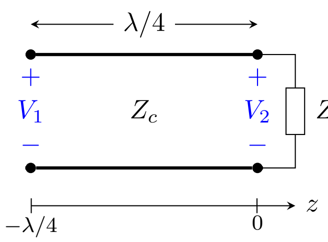
Ejemplo 2: tramo de línea $\lambda/4$



Se trata de una red recíproca y simétrica, ya que las impedancias de referencia de los puertos son iguales, por lo que sólo hace falta analizar un circuito. Al cargar el puerto 2 con Z_0 la impedancia de entrada es $Z_{\text{in}1} = Z_c^2/Z_0$ (la línea es un transformador $\lambda/4$). Por tanto,

$$S_{11} = S_{22} = \frac{Z_c^2/Z_0 - Z_0}{Z_c^2/Z_0 + Z_0} = \frac{Z_c^2 - Z_0^2}{Z_c^2 + Z_0^2}.$$

Por otra parte, la relación entre tensiones requiere un análisis algo más detallado del comportamiento de una línea de transmisión.



Asumiendo que los puertos 1 y 2 están en las coordenadas 0 y $-\lambda/4$ de la dirección de propagación z, respectivamente, las tensiones son

$$V_2 = V(z=0) = V_0^+\left(e^{j\beta\,0} + e^{-j\beta\,0}\Gamma\right) = V_0^+\,(1+\Gamma)$$
$$V_1 = V(z=-\lambda/4) = V_0^+\left(e^{j\beta\lambda/4} + e^{-j\beta\lambda/4}\Gamma\right) = V_0^+\,(j - j\Gamma) = jV_0^+\,(1-\Gamma)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\beta\,\lambda/4 = \pi/2$. En las anteriores ecuaciones, Γ es el coeficiente de reflexión en el puerto 2 ($z=0$) desde dentro de la línea de impedancia característica Z_c, cargada con Z_0, es decir

$$\Gamma = \frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c}.$$

Por tanto,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_0^+\,(1+\Gamma)}{jV_0^+\,(1-\Gamma)} = -j\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = -j\frac{Z_0}{Z_c}$$

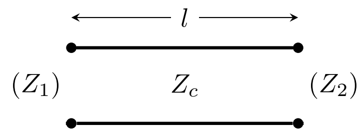
y utilizando nuevamente $Z_{\text{in}1}$, el parámetro de transmisión es

$$S_{21} = S_{12} = \frac{2Z_c^2/Z_0}{Z_c^2/Z_0 + Z_0}\left(-j\frac{Z_0}{Z_c}\right) = -2j\frac{Z_cZ_0}{Z_c^2 + Z_0^2}$$

La matriz de scattering es, por tanto,

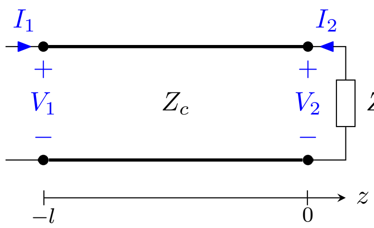
$$[S] = \frac{1}{Z_c^2 + Z_0^2}\begin{bmatrix} Z_c^2 - Z_0^2 & -2jZ_cZ_0 \\ -2jZ_cZ_0 & Z_c^2 - Z_0^2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3: tramo de línea de longitud arbitraria



Se trata de la generalización del caso anterior. Nótese que las impedancias de referencia son ahora diferentes, por lo que es el caso más general.

Para calcular S_{11} y S_{21} se ha de cargar el puerto 2 con su impedancia de referencia



Sea Γ el coeficiente de reflexión en el extremo derecho de la línea de transmisión,

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c}.$$

Con la referencia en el eje z indicada, las tensiones y voltages de los puertos son,

$$V_1 = V_0^+\big(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\big) = V_0^+\,\frac{2Z_2\cos\beta l + 2jZ_c\,\mathrm{sen}\,\beta l}{Z_2 + Z_c}$$
$$I_1 = \frac{V_0^+}{Z_c}\big(e^{j\beta l} - \Gamma e^{-j\beta l}\big) = \frac{V_0^+}{Z_c}\,\frac{2Z_c\cos\beta l + 2jZ_2\,\mathrm{sen}\,\beta l}{Z_2 + Z_c}$$
$$V_2 = -Z_2I_2 = V_0^+\big(1+\Gamma\big) = V_0^+\,\frac{2Z_2}{Z_2 + Z_c}$$

Con estas expresiones, la impedancia de entrada es

$$Z_{\text{in1}} = \frac{V_1}{I_1} = Z_c \frac{Z_2 \cos\beta l + jZ_c \operatorname{sen}\beta l}{Z_c \cos\beta l + jZ_2 \operatorname{sen}\beta l}$$

y la relación entre tensiones

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_2}{Z_2 \cos\beta l + jZ_c \operatorname{sen}\beta l}.$$

Por tanto, aplicando las expresiones generales,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{Z_{\text{in1}} - Z_1}{Z_{\text{in1}} + Z_1} = \frac{Z_c(Z_2 - Z_1)\cos\beta l + j(Z_c^2 - Z_1 Z_2)\operatorname{sen}\beta l}{Z_c(Z_1 + Z_2)\cos\beta l + j(Z_c^2 + Z_1 Z_2)\operatorname{sen}\beta l}, \\ S_{21} &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \frac{2Z_{\text{in1}}}{Z_{\text{in1}} + Z_1} \frac{V_2}{V_1} = \frac{2Z_c\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_c(Z_1 + Z_2)\cos\beta l + j(Z_c^2 + Z_1 Z_2)\operatorname{sen}\beta l}. \end{aligned}$$

Los otros parámetros, S_{11} y S_{12}, se obtienen operando del mismo modo, pero excitando el puerto 2 y cargando el puerto 1 con Z_1. Los resultados son por tanto similares, pero intercambiando los índices 1 y 2 tanto en las impedancias como en los parámetros de scattering. Con ello se obtiene $S_{12} = S_{21}$, como era de esperar por ser la línea de transmisión una red recíproca, y

$$S_{22} = \frac{Z_c(Z_1 - Z_2)\cos\beta l + j(Z_c^2 - Z_1 Z_2)\operatorname{sen}\beta l}{Z_c(Z_1 + Z_2)\cos\beta l + j(Z_c^2 + Z_1 Z_2)\operatorname{sen}\beta l}.$$

El resultado anterior se puede particularizar para algunos casos de interés:

- Impedancias de referencia iguales, $Z_1 = Z_2 = Z_0$:

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{22} &= \frac{j(Z_c^2 - Z_0^2)\operatorname{sen}\beta l}{2Z_c Z_0 \cos\beta l + j(Z_c^2 + Z_0^2)\operatorname{sen}\beta l} \\ S_{21} = S_{12} &= \frac{2Z_c Z_0}{2Z_c Z_0 \cos\beta l + j(Z_c^2 + Z_0^2)\operatorname{sen}\beta l} \end{aligned}$$

- Impedancia característica igual a las impedancias de referencia, $Z_c = Z_1 = Z_2 = Z_0$.

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = 0 \\ S_{21} &= S_{12} = \frac{1}{\cos\beta l + j\operatorname{sen}\beta l} = e^{-j\beta l} \end{aligned}$$

  Al no haber cambio de impedancia la línea está totalmente adaptada y únicamente transfiere la onda de potencia incidente, desfasándola según su longitud eléctrica.

- Longitud de la línea $l = \lambda/4 + n\lambda$. Como $\operatorname{sen}\beta l = 1$, $\cos\beta l = 0$,

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{22} &= \frac{Z_c^2 - Z_1 Z_2}{Z_c^2 + Z_1 Z_2} \\ S_{21} = S_{12} &= -2j\frac{Z_c\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_c^2 + Z_1 Z_2} \end{aligned}$$

  Se trata del ejemplo ya visto, pero con $Z_1 \neq Z_2$. Nótese que la matriz corresponde a una red simétrica, independientemente de las impedancias de referencia.

- Longitud de la línea $l = n\lambda$. Ahora $\operatorname{sen}\beta l = 0$, $\cos\beta l = 1$,

$$S_{11} = -S_{22} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$
$$S_{21} = S_{12} = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_1 + Z_2}$$

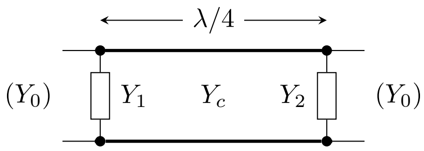
  Nótese que este caso incluye $l = 0$, que es la conexión directa de la entrada y la salida, es decir, un simple salto de impedancia de referencia.

- Longitud de la línea $l = \lambda/2 + n\lambda$. En este caso $\operatorname{sen}\beta l = 0$, $\cos\beta l = -1$,

$$S_{11} = -S_{22} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$
$$S_{21} = S_{12} = -\frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_1 + Z_2}$$

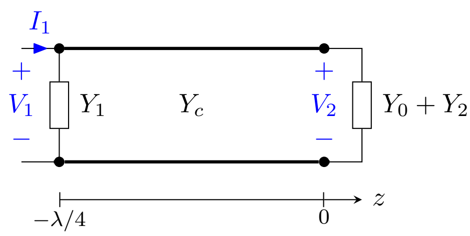
  Comparando con el resultado anterior, $l = 0$, se comprueba que este tramo de línea es transparente en reflexión, pero produce una inversión de fase en transmisión.

Ejemplo 4: tramo de línea de longitud $\lambda/4$ con admitancias en paralelo



Esta red es importante ya que aparece como parte del análisis de circuitos de más puertos, como el divisor Wilkinson (con $Y_2 = 0$), el acoplador branch-line (con $Y_1 = Y_2$) y el anillo híbrido rat-race (con $Y_1 = -Y_2$). El análisis de esta red es mucho más sencillo si se formula con admitancias, como aparece en el diagrama, ya que los elementos están conectados en paralelo.

Para calcular S_{11} y S_{21} se ha de cargar el puerto 2 con Y_0, que quedará conectada en paralelo con Y_2. Nótese que las tensiones de entrada y salida de la red completa son también las de la línea de transmisión, pero no las corrientes.



Puesto que la longitud del tramo de línea es $\frac{\lambda}{4}$ e Y_1 está conectada en paralelo a su entrada, la admitancia de entrada es,

$$Y_{\text{in}1} = \frac{I_1}{V_1} = Y_1 + \frac{Y_c^2}{Y_0 + Y_2}$$

Por otra parte, la relación entre las tensiones de entrada y salida es (véase el ejemplo de la línea $\lambda/4$ anterior),

$$\frac{V_2}{V_1} = -j\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = -j\frac{Y_c}{Y_0 + Y_2}$$

ya que el coeficiente de reflexión Γ a la salida de la línea de transmisión y referido a su admitancia característica es:

$$\Gamma = \frac{Y_c - (Y_0 + Y_2)}{Y_c + (Y_0 + Y_2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{Y_c}{Y_0 + Y_2}$$

Con la admitancia de entrada y la relación entre tensiones se pueden calcular los parámetros de scattering.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{Y_0 - Y_{\text{in}1}}{Y_0 + Y_{\text{in}1}} = \frac{(Y_0 - Y_1)(Y_0 + Y_2) - Y_c^2}{(Y_0 + Y_1)(Y_0 + Y_2) + Y_c^2} \\ S_{21} &= \frac{2Y_0}{Y_0 + Y_{\text{in}1}} \frac{V_2}{V_1} = \frac{-2jY_0 Y_c}{(Y_0 + Y_1)(Y_0 + Y_2) + Y_c^2} \end{aligned}$$

Los parámetros de scattering restantes se pueden obtener simplemente intercambiando los índices 1 y 2 en las expresiones anteriores (puesto que la estructura del circuito es simétrica, aunque no los valores de Y_1 e Y_2). De ello resulta $S_{12} = S_{21}$ (como es de esperar por la reciprocidad de todos los elementos y la red completa) y

$$S_{22} = \frac{(Y_0 + Y_1)(Y_0 - Y_2) - Y_c^2}{(Y_0 + Y_1)(Y_0 + Y_2) + Y_c^2}$$