CONSTRUCCIÓN DE SUBGRUPOS

1. Centralizadores

Nuestro objetivo es encontrar en un grupo G subgrupos de cierto orden, si los hay (es decir, el inverso del Teorema de Lagrange). Si conocemos el grupo G entonces podemos hacerlo directamente, pero si sólo tenemos información parcial sobre G entonces es más difícil. Por eso, vamos a mirar a subgrupos naturales para encontrar del tamaño que queremos.

Una familia de subgrugpos muy importantes son los centralizadores: para cada $g \in G$ tenemos su subgrupo centralizador, que tiene a los elementos que conmutan con g:

$$C_G(g) = \{h \in G : hg = gh\} = \{h \in G : hgh^{-1}\}.$$

Vimos que estos subgrupos estaban relacionados con las clases de conjugación, en el sentido de que el número de conjugados de g es igual a $|G/C_G(g)|$. De ahí sacábamos la ecuación de clases de conjugación de G:

$$|G| = \sum_g |G/C_G(g)|$$

donde en la suma tomamos un g por cada clase. Así, por ejemplo, si $G = S_4$, como ya sabemos sus clases de conjugación, vemos que la ecuación de clases es

$$24 = 1 + 3 + 6 + 6 + 8.$$

Así, la clase de los 2x2 ciclos tiene 3 elementos, luego el centralizador de (12)(34) debe ser un subgrupo de orden 8. Así, hemos encontrado un subgrupo de orden 8 sin calcularlo. Si queremos calcularlo explícitamente podemos usar que la fórmula de conjugación en S_n, por lo que g estará en el centralizador cuando

$$(g(1)g(2))(g(3)g(4)) = (12)(34)$$

Por tanto, vemos que (12) y (1324) están, luego

$$C_{S_4}((12)(34)) = \langle (12), (1324)\rangle.$$

Otra cosa importante a la hora de calcularlo es saber que $C_G(g) \geq \langle g\rangle$.

2. Centro

En la ecuación de clases de un grupo tenemos queremos

$$G = 1 + 1 + \ldots + 1 + \text{ sumandos mayores que uno.}$$

Los unos corresponden a elementos g cuyo centralizador es todo G, es decir, que g conmuta con todos los elementos del grupo. Resulta que si juntamos todos esos elementos que conmutan con todos, eso también es un grupo que se llama *Centro* de G:

$$Z = Z(G) = \{z \in G : hz = zh \, \forall h \in G\}.$$

Así, podemos escribir la ecuación de clases en la forma mejorada

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{g \notin Z(G)} |G/C_G(g)|.$$

Además, el centro es un subgrupo normal en G, ya que como $gz = zg$ para todo $g \in G$ entonces $gZ = Zg$.

Por ejemplo, en D_n el centro es siempre $\langle g_\pi \rangle = \{g_0, g_\pi\}$, en S_n el centro es la identidad, en $\mathrm{GL}(d, K)$ el centro son λI, $\lambda \in K$, y en $\mathrm{SL}(d, K)$ es $\pm I$.

Además, podemos usar la ecuación de clases para decir que el centro de cualquier grupo de orden 8 no puede ser trivial, porque los demás sumandos deben ser pares.

3. Preimágenes

Otro método para obtener subgrupos de un grupo G es si tenemos un homomorfismo de G en otro grupo M,

$$f : G \to M.$$

En ese caso, para todo subgrupo $J \leq M$, podemos ver que su *preimagen* es siempre subgrupo de G, es decir

$$f^{-1}(J) = \{g \in G : f(g) \in J\} \leq G.$$

Además, la preimagen pasa subgrupos normales a subgrupos normales. El caso más importante es

$$\ker f = f^{-1}(e).$$

Por ejemplo, si tenemos un grupo G de orden 12 con un subgrupo H de orden 4, considerando la acción de G en el cociente G/H tenemos un homomorfismo

$$f : G \to S_3$$

con núcleo $N \leq H$. N es el llamado corazón de H. En este caso, como $|G| = 12$ y $|S_3| = 6$, por el teorema de isomorfía N debe tener orden múltiplo de 2, por lo que G tiene un subgrupo normal de orden 2 o 4.

4. Correspondencia con subgrupos de un cociente

Un caso particular de preimágenes es el siguiente.

Lema 4.1 (Correspondencia con subgrupos de cociente)**.** *Sea $N \lhd G$. Entonces hay una correspondencia entre los subgrupos de G que contienen a N y los subgrupos de G/N. Además, dicha correspondencia preserva normalidad y cambia el tamaño de los subgrupos por un factor $|N|$.*

La correspondencia envía un subgrupo $N \leq H \leq G$ al subgrupo $H/N \leq G/N$. Vamos a ver que dicha operación tiene inversa. Si $J \leq G/N$, entonces

$$J = \{s_j N\}$$

para ciertos $s_j \in G$. Así, tomando $\tilde{J} = \langle s_j, N \rangle$, vemos que es un subgrupo de G que contiene a N y satisface $\tilde{J}/N = J$. Al procedimiento de pasar del subgrupo del cociente J al subgrupo $\tilde{J}$ de G le llamaremos «levantar J» a G.

Esta correspondencia es muy útil para hallar subgrupos en G. Por ejemplo, si queremos ver los subgrupo de S_4 que contienen al normal V_4 formado por 2x2 ciclos y la identidad, entonces calculando

$$S_4/V_4 = \{\overline{Id}, \overline{(123)}, \overline{(132)}, \overline{(12)}, \overline{(13)}, \overline{(23)}\} \cong S_3,$$

como los subgrupos no triviales de S_3 son $\langle (12) \rangle$, $\langle (13) \rangle$ y $\langle (23) \rangle$ y $\langle (123) \rangle$, entonces los de S_4 que contienen a V_4 son

$$\langle (12), V_4 \rangle \qquad \langle (13), V_4 \rangle \qquad \langle (23), V_4 \rangle \qquad \langle (123), V_4 \rangle.$$

5. Otros: estabilizadores, conjugados, normalizadores

Esta parte quizás es mejor no contarla, o ponerla en algún problema

Si tenemos una acción de G en un conjunto X, también podemos mirar a los subgrupos estabilizadores; tenemos un estabilizador G_x por cada $x \in X$.

Si partimos de un subgrupo $H \leq G$, otra manera importante de construir nuevos subgrupos es mirando a los *conjugados* de H: para cada $g \in G$, es trivial comprobar que el conjunto gHg^{-1} es un subgrupo de G del mismo tamaño que H, y con el mismo comportamiento que H, ya que la conjugación es un isomorfismo. Además, el *número de conjugados* de H, que es el número de subgrupos distintos que aparecen de esa forma, se puede contar de forma muy parecida al número de conjugados de un elemento: es igual a $|G/N_G(H)|$, donde $N_G(H)$ es un subgrupo de G denominado normalizador de H. En particular, el número de conjugados divide a $|G|$.

El *normalizador* de un subgrupo H se define como un centralizador: es el conjunto de elementos de G que conmutan con H como conjunto, es decir $gH = Hg$,

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\} = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

Igual que con el centralizador, se puede comprobar que es un subgrupo. Como vemos, se llama normalizador porque sus elementos normalizan H. En particular, H es normal en G si y sólo si $N_G(H) = G$. En general $H \lhd N_G(H) \leq G$, y por tanto $N_G(H)$ mide el grado de normalidad de H en G.

Por ejemplo, en S_4 el subgrupo $\langle(123)\rangle$ no es normal. Eso quiere decir que su normalizador será un subgrupo no trivial que lo contenga. Podemos calcularlo usando la fórmula

$$g(123)g^{-1} = (g(1)g(2)g(3)),$$

que debería ser igual a $(123) = (231) = (312)$ o $(132) = (321) = (213)$. Así, vemos que el normalizador tiene seis elementos, y de hecho es el subgrupo de permutaciones de S_4 que no mueven el 4, y por tanto isomorfo a S_3.

Así, el número de subgrupos conjugados de $\langle(123)\rangle$ debería ser 4. Efectivamente, vemos que los subgrupos conjugados son

$$\langle(123)\rangle \qquad \langle(124)\rangle \qquad \langle(134)\rangle \qquad \langle(234)\rangle.$$