PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Propiedad	**Señal Periódica**	**Coeficientes de la serie**
	$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ Periódicas de periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Obtención de coeficientes	$x(t)\big\vert_T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt$
	x(t) Señal par	$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$
	x(t) Señal impar	$a_k = -\frac{2j}{T}\int_0^{T/2} x(t)\,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)\,dt$
Linealidad	$A\,x(t) + B\,y(t)$	$A\,a_k + B\,b_k$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$a_k\, e^{-jk\omega_0 t_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x(t)\,e^{jM\omega_0 t}$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	$x(-t)$	a_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t),\ \alpha > 0$ (Periódica de periodo T/α)	a_k
Convolución periódica	$\int_T x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$	$T\,a_k\,b_k$
Multiplicación	$x(t)\,y(t)$	$\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p\, b_{k-p}$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0\, a_k$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ (de valor finito y periódica solo si $a_0 = 0$)	$\frac{1}{jk\omega_0} a_k$
Simetría conjugada para señales reales.	$x(t)$ Señal real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ R_e[a_k] = R_e[a_{-k}] \\ I_m[a_k] = -I_m[a_{-k}] \\ \vert a_k\vert = \vert a_{-k}\vert \\ \varphi[a_k] = -\varphi[a_{-k}] \end{cases}$
Señal real y par	x(t) real y par	a_k real y par
Señal real e impar	x(t) real e impar	a_k imaginaria e impar

Relación de Parseval para señales periódicas

$$P_m[x(t)] = \frac{1}{T}\int_T \left|x(t)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|a_k\right|^2$$

COEFICIENTES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES CONTINUAS

SEÑAL PERIÓDICA	COEFICIENTES
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	a_k
$x(t) = e^{j\omega_0 t}$	$a_k = \begin{cases} 1 \ \forall\ k = 1 \\ 0 \ \forall\ k \neq 1 \end{cases}$
$\cos\ \omega_0 t$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}\ ;\ a_k = 0,\ \forall\ \lvert k \rvert \neq 1$
$\text{sen}\ \omega_0 t$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}\ ;\ a_k = 0,\ \forall\ \lvert k \rvert \neq 1$
$x(t) = 1$	$a_0 = 1\ ;\ a_k = 0,\ \forall\ k \neq 0$
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$a_k = \frac{1}{T}\ \ \forall\ k$
Onda cuadrada periódica $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A\, \Pi\left(\frac{t - mT}{\tau}\right)$ $(\tau \text{ anchura del pulso})$ ó $x(t) = \begin{cases} A,\ \lvert t \rvert < \tau/2 \\ 0,\ \tau/2 < \lvert t \rvert < T/2 \end{cases}$ y $x(t + T) = x(t)$	$a_k = A\frac{\text{sen}\ (k\omega_0\tau/2)}{\pi k} = \frac{A\tau}{T}\text{sin}\ c\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$
Onda triangular periódica $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A\, \Delta\left(\frac{t - mT}{\tau}\right)$ $(2\tau \text{ anchura del pulso})$	$a_k = \frac{A\tau}{T}\text{sin}\ c^2\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$
$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A\, \Pi\left(\frac{t - mT}{\tau}\right)\cdot\cos\ \omega_p t$	$a_k = \frac{A\tau}{2T}\text{sin}\ c\left[\left(\frac{k\omega_0 - \omega_p}{2\pi}\right)\tau\right] + \frac{A\tau}{2T}\text{sin}\ c\left[\left(\frac{k\omega_0 + \omega_p}{2\pi}\right)\tau\right]$

TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO CONTINUO PROPIEDADES

Propiedad	Señal	Transformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(\omega)$ $Y(\omega)$
Ecuaciones	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$
	$x(t)$ Par	$X(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos \omega t\, dt$
	$x(t)$ Impar	$X(\omega) = -2j\int_{0}^{\infty} x(t)\,\mathrm{sen}\ \omega t\, dt$
Linealidad	$a\,x(t) + b\,y(t)$	$a\,X(\omega) + b\,Y(\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$X(\omega)\, e^{-j\omega t_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x(t)\, e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega-\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Escalado de tiempo y frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)\, Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)\, y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * Y(\omega)\right]$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{d\,x(t)}{dt}$	$j\omega\, X(\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$
Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ Señal real	$\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ R_e[X(\omega)] = R_e[X(-\omega)] \\ I_m[X(\omega)] = -I_m[X(-\omega)] \\ \lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert \\ \varphi[X(\omega)] = -\varphi[X(-\omega)] \end{cases}$
Simetría para señales reales y pares	$x(t)$ Señal real y par	$X(\omega) = R_e[X(\omega)] \begin{cases} \lvert X(\omega)\rvert = \lvert R_e[X(\omega)]\rvert \\ \varphi[X(\omega)] = \begin{cases} 0 \\ \pm\pi \end{cases} \end{cases}$
Simetría para señales reales y pares	$x(t)$ Señal real e impar	$X(\omega) = j\, I_m[X(\omega)] \begin{cases} \lvert X(\omega)\rvert = \lvert I_m[X(\omega)]\rvert \\ \varphi[X(\omega)] = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$
Descomposición par e impar de señales reales	$x_p(t) = \mathrm{Par}\{x(t)\}\quad [x(t)\ \mathrm{real}]$ $x_I(t) = \mathrm{Im\ p}\{x(t)\}\quad [x(t)\ \mathrm{real}]$	$\mathrm{Re}\{X(\omega)\}$ $j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}$
	$\left.\begin{matrix} f(t) \leftrightarrow G(\omega) \\ G(t) \leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega) \end{matrix}\right\}$ DUALIDAD	
Relación de Parseval para señales no periódicas	$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2\, d\omega$	

EJEMPLOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER DE SEÑALES CONTINUAS

SEÑAL	TRANSFORMADA
$x(t)\big\|_{T_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \; \delta(\omega - k\omega_0)$
$x(t) = A$	$2\pi A \; \delta(\omega)$
$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$	$2\pi A\,\delta(\omega - \omega_0)$
$x(t) = A \cos \omega_0 t$	$\pi A[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$x(t) = A \text{ sen } \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} A[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
Pulso rectangular $x(t) = A \prod\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (\tau \quad \text{anchura del pulso})$ ó $x(t) = \begin{cases} A, & \|t\| < \tau/2 \\ 0, & \|t\| > \tau/2 \end{cases}$	$X(\omega) = \frac{2A \text{ sen } (\omega\tau/2)}{\omega} = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$
Pulso triangular $x(t) = A\Delta\left(\frac{t}{2\tau}\right)(2\tau \text{ anchura del pulso})$	$X(\omega) = A\tau \text{ sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$x(t) = \frac{\text{sen } Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \|\omega\| < W \\ 0, & \|\omega\| > W \end{cases}$
$x(t) = A\,\delta(t)$	A
$x(t) = A\,\delta(t - t_0)$	$A e^{-j\omega t_0}$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$x(t) = e^{-at} u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$x(t) = te^{-at} u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \quad \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$

SERIES DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Propiedad	Señal periódica	Coeficiente
	$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ Periódicas con periodo N y frecuencia fundamental $\Omega_0=2\pi/N$	$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\}$ Periódicas de periodo N
Ecuaciones	$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$
Linealidad	$A x_1[n] + B x_2[n]$	$A a_k + B b_k$
Desplazamiento de tiempo	$x[n-n_0]$	$a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x[n] e^{jM\frac{2\pi}{N}n}$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	a_{-k}
Escalado en el tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & n \text{ multiplo de } m \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$ (periódica de periodo mN)	$\frac{1}{m} a_k$ (vistas como periódicas de periodo mN)
Convolución periódica	$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{r=\langle N \rangle} x[r] y[n-r]$	$N a_k b_k$
Multiplicación	$x[n] y[n]$	$\sum_{r=\langle N \rangle} a_r b_{k-r}$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{-jk(2\pi/N)}\right) a_k$
Suma consecutiva	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (de valor finito y periódica sólo si $a_0=0$)	$\frac{a_k}{\left(1 - e^{-jk(2\pi/N)}\right)}$
Simetría conjugada para señales reales.	$x[n]$ Re al	$a_k = a^*_{-k}$ $\mathrm{Re}[a_k] = \mathrm{Re}[a_{-k}]$ $\mathrm{Im}[a_k] = -\mathrm{Im}[a_{-k}]$ $\lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert$ $\varphi_{a_k} = -\varphi_{a_{-k}}$
Señales reales y pares	$x[n]$ REAL y PAR	a_k real y par
Señales reales e impares	$x[n]$ REAL e IMPAR	a_k imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$x_p[n] = \mathrm{Par}\{x[n]\}$ $[x[n] \text{ real}]$ $x_I[n] = \mathrm{Im\ par}\{x[n]\}$ $[x[n] \text{ real}]$	$\mathrm{Re}[a_k]$ $j\,\mathrm{Im}[a_k]$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$P_m = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N \rangle} \lvert x[n] \rvert^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} \lvert a_k \rvert^2$$

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE COEFICIENTES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS

SEÑAL	COEFICIENTES
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	a_k
$e^{j\Omega_0 n}$	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m\pm N, m\pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$ (b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ señal aperiódica
$\cos \Omega_0 n$	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$ (b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ señal aperiódica
$\text{sen } \Omega_0 n$	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2j, & k = m, m\pm N, m\pm 2N, \cdots \\ -1/2j, & k = -m, -m\pm N, -m\pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$ (b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ señal aperiódica
$x[n] = 1$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$a_k = \frac{1}{N} \quad \forall\ k$
Onda cuadrada periódica $x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & N_1 < \lvert n\rvert \le N/2 \end{cases}$ y $x[n+N] = x[n]$	$a_k = \frac{\text{sen}\left[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})\right]}{N\ \text{sen}\left[(2\pi k/2N)\right]}, \ k \ne 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$

TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Propiedad	Señal	Transformada
	$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} X(\Omega) \\ Y(\Omega) \end{matrix}\right\}$ Periódicas de periodo 2π
Ecuación	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$
Señal periódica	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ (señal periódica, N)	$X(\Omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$
Señal periódica	$x[n] = x[n+N]$ (señal periódica)	$a_k = \frac{1}{N}X\left(k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{N}X(k\Omega_0)$
Linealidad	$a\,x[n] + b\,y[n]$	$a\,X(\Omega) + b\,Y(\Omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_0]$	$X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x[n]e^{j\Omega_0 n}$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión en tiempo	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Expansión en tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ multiplo de } k \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$	$X(k\Omega)$
Convolución	$x[n] * y[n]$	$X(\Omega)\cdot Y(\Omega)$
Multiplicación	$x[n]\cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\theta)Y(\Omega - \theta)\,d\theta$
Diferenciación en tiempo	$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{-j\Omega}\right)X(\Omega)$
Acumulación	$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$	$\frac{X(\Omega)}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - 2\pi k)$
Diferenciación en frecuencia	$nx[n]$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Simetría conjugada para señales reales	$x[n]$ REAL	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$ $\mathrm{Re}[X(\Omega)] = \mathrm{Re}[X(-\Omega)]$ $\mathrm{Im}[X(\Omega)] = -\mathrm{Im}[X(-\Omega)]$ $\lvert X(\Omega)\rvert = \lvert X(-\Omega)\rvert$ $\varphi_{X(\Omega)} = -\varphi_{X(-\Omega)}$
Simetría para señales reales pares	$x[n]$ REAL y PAR	$X(\Omega)$ real y par
Simetría para señales reales impares	$x[n]$ REAL e IMPAR	$X(\Omega)$ imaginaria pura e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$x_p[n] = \mathrm{Par}\{x[n]\}$ $[x[n]$ real $]$ $x_I[n] = \mathrm{Im\ par}\{x[n]\}$ $[x[n]$ real $]$	$\mathrm{Re}[X(\Omega)]$ $j\,\mathrm{Im}[X(\Omega)]$
Relación de Parseval para señales aperiódicas $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert X(\Omega)\rvert^2\,d\Omega$		
DUALIDAD $\begin{cases} x[n] \xleftrightarrow{TF} X(\Omega) \\ x[-n] = a_k[X(\Omega)] \end{cases}$		

EJEMPLOS DE TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS

SEÑAL	COEFICIENTES
$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$
$\cos \Omega_0 n$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)]$
$\operatorname{sen} \Omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)]$
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$a^n u[n] \quad \lvert a \rvert < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n \rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n \rvert > N_1 \end{cases}$	$\frac{\operatorname{sen}\left[\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\operatorname{sen}(\Omega/2)}$
$\frac{\operatorname{sen} Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right) \quad 0 < W < \pi$	$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \lvert \Omega \rvert \le W \\ 0, & W \le \lvert \Omega \rvert \le \pi \end{cases}$ $X(\Omega)$ periódica de periodo 2π
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\Omega - 2\pi k)$
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$(n + 1)a^n u[n] \quad \lvert a \rvert < 1$	$\frac{1}{\left(1 - ae^{-j\Omega}\right)^2}$
$\frac{(n + r - 1)!}{n!(r - 1)!} a^n u[n] \quad \lvert a \rvert < 1$	$\frac{1}{\left(1 - ae^{-j\Omega}\right)^r}$