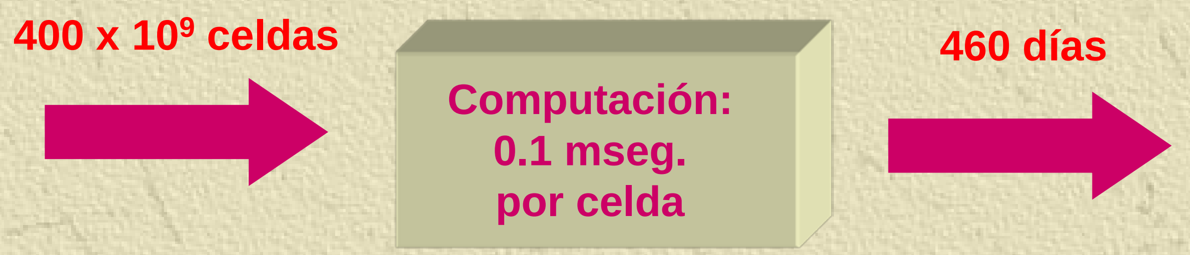
TECNICAS DE REDUCCIÓN DE VARIANZA

- Interesa que el **tiempo de ejecución** (coste) y el **error cometido en las estimaciones** sean pequeños (relación inversa).

- Minimizar **coste x varianza:**
  - Si el coste es fijo, minimizamos la varianza: TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE VARIANZA.
  - Si la varianza es fija, minimizamos el coste: TÉCNICAS DE ACELERACIÓN DE SIMULACIONES.

NECESIDAD DE ESTAS TÉCNICAS

- Ejemplo: simulación de una red ATM
  - Probabilidad de pérdida de celdas en ATM del orden de 10^{-9}.
  - Nº de celdas perdidas en la simulación: 400.



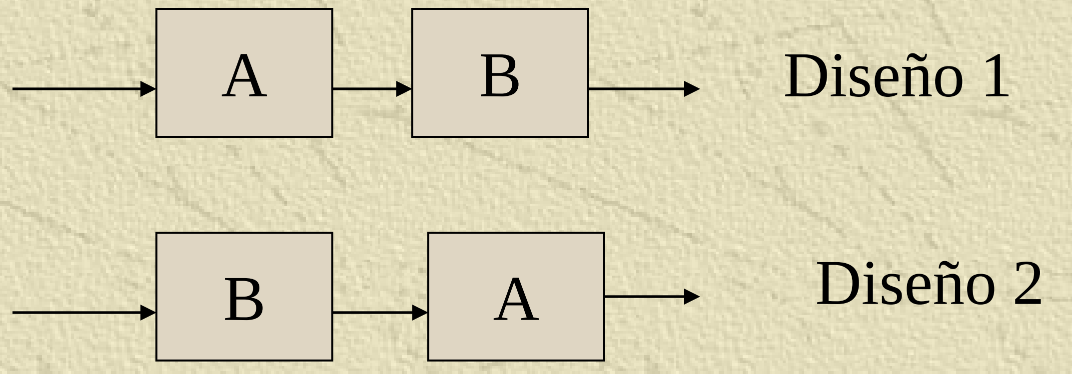
- Simulación normal es impracticable: necesarias técnicas que reduzcan el tiempo de simulación.
- Con estas nuevas técnicas se ha conseguido reducir el tiempo de simulación a 60 segundos.

TIPOS DE TÉCNICAS

- GRUPO 1: Las que tratan de manipular el proceso de generación de números aleatorios.
  - Números aleatorios comunes.
  - Variables antitéticas.
- GRUPO 2: Las que tratan de mejorar el proceso de estimación una vez realizada la simulación.
  - Estimación indirecta.
  - Control de variables o variables de control.
- GRUPO 3: Las especializadas en sucesos “raros”(con probabilidad pequeña de ocurrir).
  - Muestreo de importancia.
  - RESTART.

GRUPO 1. NÚMEROS ALEATORIOS COMUNES

- Se emplea para comparar dos o más configuraciones alternativas de un sistema.
- **Ejemplo:** sistema de producción con dos máquinas A y B. Las piezas tienen que pasar por ambas ¿Qué configuración del sistema conduce a mejores resultados?



GRUPO 1. NÚMEROS ALEATORIOS COMUNES

- Se basa en emplear los **mismos números aleatorios** en la simulación de las distintas configuraciones del sistema.
- Es necesario **sincronizar** los números aleatorios: un número que en una configuración se ha empleado para un propósito específico, se debe de emplear para el mismo propósito en las demás configuraciones del sistema.
- Usando la sincronización, las piezas que pasan por los dos diseños tienen que ser las mismas y en el mismo orden.

GRUPO 1. NÚMEROS ALEATORIOS COMUNES

- Para mantener la sincronización es necesario utilizar secuencias independientes de números aleatorios para cada fuente de aleatoriedad.
- En el ejemplo, se usarían tres secuencias independientes de nº aleatorios: una para las piezas, otra para los tiempos de servicio de la máquina A y otra para los de la máquina B.
- Al emplearse la sincronización la técnica estadística adecuada es la de **muestras pareadas**.

GRUPO 1. NÚMEROS ALEATORIOS COMUNES

- Si W_i es el tiempo medio que las piezas pasan en el sistema i-ésimo, i = 1,2, usando la teoría de muestras pareadas, definimos la variable diferencia $D = W_1 - W_2$. Realizando n simulaciones independientes, tenemos el intervalo de confianza a nivel 1-α para $D = W_1 - W_2$.

$$\left(\bar{D} \pm k \frac{S_D}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{con} \quad P\left(-k < t_{n-1} < k\right) = 1 - \alpha$$

$$\begin{cases} W_1 - W_2 \approx 0, \text{ambos diseños son similares} \\ W_1 - W_2 > 0, \text{es mejor el segundo diseño} \\ W_1 - W_2 < 0, \text{es mejor el primer diseño} \end{cases}$$

GRUPO 1. NÚMEROS ALEATORIOS COMUNES

- ¿Cómo se reduce la varianza frente a no usar números aleatorios comunes? El intervalo propuesto es del tipo:

$$\left(\bar{D} \pm k\sqrt{V\left(\bar{D}\right)}\right) \quad \text{donde}$$

$$V\left(\bar{D}\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V\left(W_{i,1} - W_{i,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(V\left(W_{i,1}\right) + V\left(W_{i,2}\right) - 2Cov\left(W_{i,1}, W_{i,2}\right)\right)$$

Si los números aleatorios empleados fuesen diferentes, la covarianza sería 0. En este caso, es positiva.

GRUPO 1.VARIABLES ANTITÉTICAS

- Se emplea para simular un único sistema, no para comparar.
- **Idea:** introducir **correlación negativa** entre las estimaciones realizadas de la característica X a partir de dos simulaciones (réplicas) consecutivas.
- Si U es un número aleatorio que se utiliza para un determinado propósito en la primera réplica, 1-U se usa en la segunda réplica para ese mismo propósito (sincronización).
- Usaremos que el intervalo de confianza es

$$\left(\bar{X} \pm k\sqrt{V\left(\bar{X}\right)}\right)$$

GRUPO 1.VARIABLES ANTITÉTICAS

- **Base matemática del método** para estimar X:

$\left(X_{j1}, X_{j2}\right)$ con $X_{j1} =$ estimación de X con la réplica j-ésima y con U y $X_{j2} =$ estimación de X con la réplica j-ésima y con 1-U, $j = 1,..,n$

$$X_j = \frac{X_{j1} + X_{j2}}{2},\ j = 1,\dots,n \quad \text{y} \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

Entonces, como la covarianza entre X_{j1} y X_{j2} es negativa, se consigue reducir la varianza ya que:

$$V\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} V\left(X_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4}\left(V\left(X_{j1}\right) + V\left(X_{j2}\right) + 2Cov\left(X_{j1}, X_{j2}\right)\right)$$

GRUPO 1.VARIABLES ANTITÉTICAS

- Igual que el método de números aleatorios comunes, no hay seguridad de cuanto mejora.
- Para que funcione es fundamental que la característica a estimar sea una función monótona de los números aleatorios generados. Esto no se cumple en todos los sistemas.

GRUPO 2. ESTIMACIÓN INDIRECTA

- Esta técnica es específica para estimación de características en estado estacionario en **sistemas de colas.**
- Consiste en emplear fórmulas analíticas para algunas estimaciones.
- Por ejemplo, para estimar W en una simulación:

$$1.\hat{W}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \text{ con } D_i = \text{tiempo que pasa el cliente i-ésimo en el sistema}$$

$$2.\hat{W}_q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_{i,q} \text{ con } D_{i,q} = \text{tiempo que pasa el cliente i-ésimo en la cola}$$

Entonces, $\hat{W}_2 = \hat{W}_q + \dfrac{1}{\mu}$

GRUPO 2. ESTIMACIÓN INDIRECTA

- Se dice que el segundo estimador es una **estimación indirecta** de W.
- Es razonable pensar que la varianza del segundo estimador será menor que la del primero porque se sustituye un término aleatorio por un término fijo.

GRUPO 3. ESPECIALIZADAS EN SUCESOS RAROS

- La idea del muestreo de importancia es la siguiente:
  - Se quiere estimar un suceso A con probabilidad muy pequeña de ocurrir, p.
  - Se define otro suceso relacionado con él, C con P(C)»p.
  - Se estima mediante la simulación P(C).
  - Se buscan fórmulas analíticas para calcular P(A)=p a partir de la estimación de P(C).

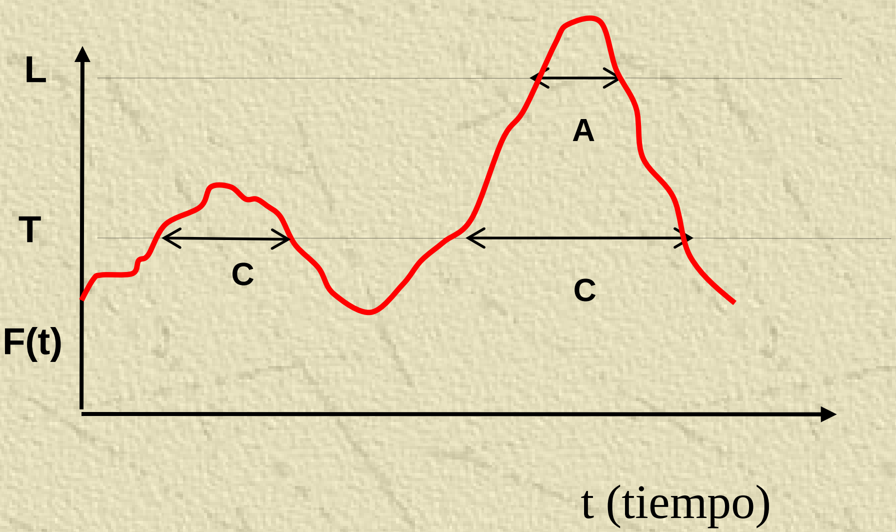
GRUPO 3. ESPECIALIZADAS EN SUCESOS RAROS

- **Ejemplo:** Se quiere estudiar un buffer de una impresora con capacidad para 100 trabajos. Se desea estimar la probabilidad de pérdida de un trabajo, p.

- Se incrementa la tasa de llegada y se calcula mediante simulación la probabilidad de pérdida (Suceso C)
- Se calcula analíticamente P(A) a partir de P(C))

RESTART

Gráficamente:



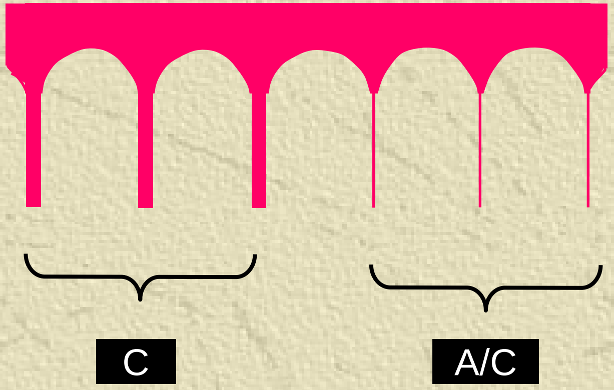
- T = 50: umbral; L = 100
- A : { F(t) ≥ L }, suceso infrecuente.
- C : { F(t) ≥ T }.
- C ⊃ A
- 1 >> P(C) >> P(A)
- Entonces,

$$P(A) = P(C)\,P(A/C)$$

RESTART

•Con **simulación normal** se obtiene una buena estimación para P(C) porque es un suceso que ha ocurrido bastantes veces

• Para P(A/C) se obtiene una mala estimación porque este suceso ha ocurrido pocas veces en la simulación.

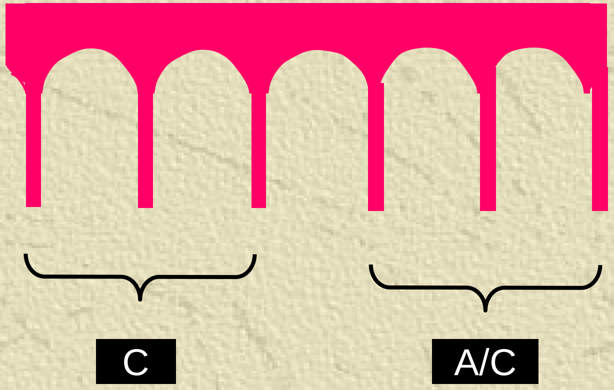


RESTART

- ¿Cómo conseguir estimar mejor P(A/C) ?
- Necesitamos que cuando ocurra C, el suceso A ocurra más veces.
- Se considera el primer instante en el que ocurre C, se guarda el estado de la simulación y se realizan R simulaciones secundarias que tiene como condición de parada el momento en el que se sale de C (se cruza el umbral T hacia abajo).
- Se sigue la simulación principal (o se deja seguir la R-ésima simulación secundaria) hasta el próximo instante en que vuelva a aparecer C.

RESTART

- En ese momento vuelven a realizarse R simulaciones secundarias. Se repite este proceso hasta que termina la simulación principal.
- El resultado es una mayor aparición de A supuesto que C se ha verificado y una mejor estimación de P(A/C) .



RESTART

- La idea se puede generalizar usando varios sucesos intermedios para llegar al suceso A:

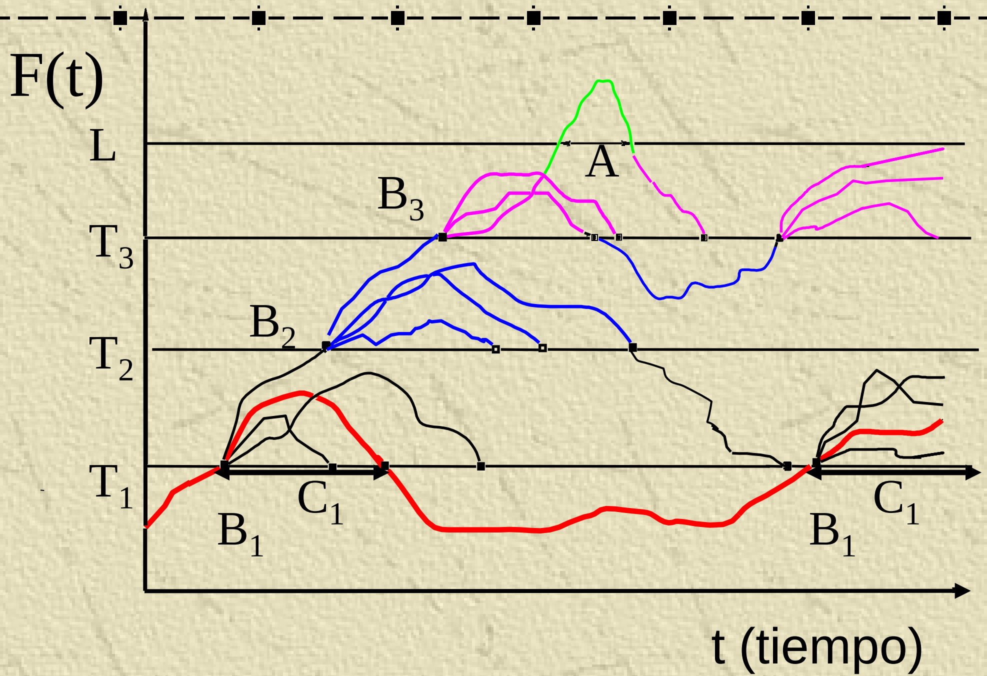
$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_M \supset A$$

$$P(A) = P(C_1) \cdot P(C_2 / C_1) \cdot \ldots\ldots \cdot P(A / C_M)$$

$$C_i = P\left(F(t) \geq T_i\right)$$

- Una vez que se alcanza un umbral (T_i) se guarda el estado de la simulación y se realizan R_i simulaciones secundarias. Si en alguna de éstas se alcanza el siguiente umbral (T_{i+1}), se realizan R_{i+1} simulaciones secundarias, guardando previamente el estado de la simulación.

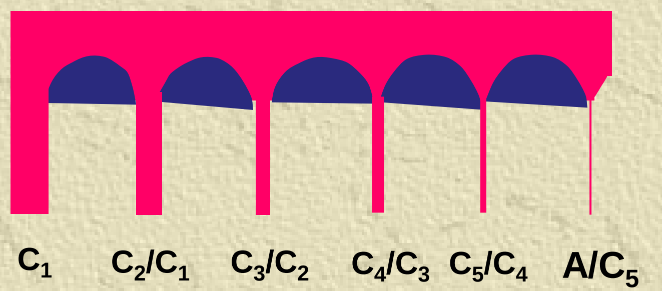
RESTART MÚLTIPLE



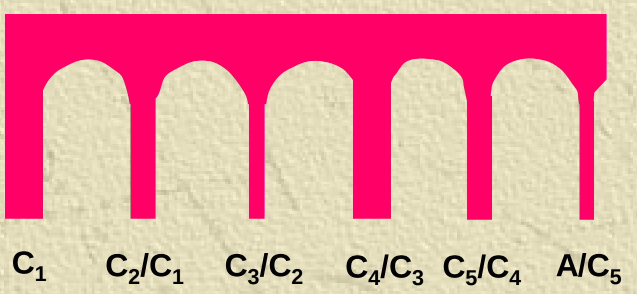
$$C_i = P\left(F(\mathbf{t}) \geq T_i\right)$$

Nº de reintentos en $B_i = R_i$.

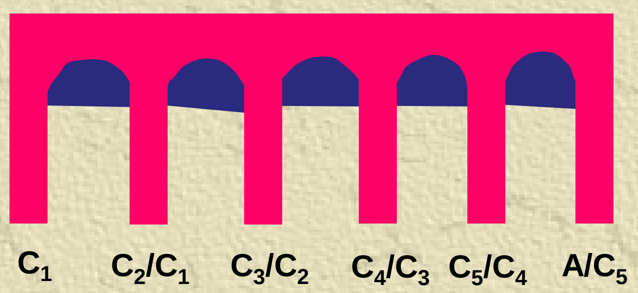
- La idea gráfica de cómo funcionarían una simulación normal, RESTART con un umbral y RESTART multiumbral para estimar las probabilidades condicionadas:



Simulación ordinaria



Simulación con RESTART monoumbral



Simulación con RESTART multiumbral

EFICIENCIA DEL RESTART

Tiempo de ejecución (coste) para igual error relativo

<u>Simulación normal</u> <u>RESTART</u>

$$K\frac{1}{p} \qquad \frac{Ke^2}{4}\left(\ln\frac{1}{p}\right)^2 f_R\, f_T\, f_V\, f_O$$

$$\text{Ganancia} = \frac{4}{e^2}\,\frac{1/p}{\left(\ln\frac{1}{p}\right)^2}\,\frac{1}{f_R\, f_T\, f_V\, f_O}$$

Los factores reflejan ineficiencia debida a:

- f_R - R_i no óptimos
- f_T - T_i no óptimos
- f_V - varianza en B_i
- f_O - consumo de tiempo del algoritmo

EFICIENCIA DEL RESTART

- Ganancia para $f_R = f_T = f_V = f_O = 1$(caso óptimo)

p	Tiempo de computación: Simulación normal	Tiempo de computación: RESTART	Ganancia
10^{-4}	1 min.	1 seg.	63
10^{-7}	17 horas	3 seg.	2×10^{4}
10^{-10}	2 años	6 seg.	1×10^{7}
10^{-100}	2×10^{90} años	10 min.	1×10^{95}

- **Suposición:** se ha usado un ordenador que tarda 1 minuto en realizar una simulación normal para $p = 10^{-4}$. Si se hubiese usado un ordenador el doble de rápido, todas las cantidades de la tabla se hubieran reducido a la mitad.

CONCLUSIONES

- RESTART aporta:
  - Ahorro drástico del tiempo de computación.
  - Aplicación no complicada en la mayoría de los casos
  - Propósito general