Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis de Sistemas de Control no Lineal

- **Sistemas no lineales**
  - **Función descriptiva: Sólo sirve para sistemas sencillos y con determinada característica**
  - **Linealización alrededor del punto de operación**
  - **No puede utilizarse el modelo de función de transferencia, ni siquiera en los casos más sencillos**

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis de Sistemas de Control no Lineal

- **Linealización alrededor del punto de operación**
  - **Desarrollo en serie de Taylor de y=f(x) alrededor de $\bar{x}$**

$$y = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} (x-\bar{x}) + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=\bar{x}} \frac{(x-\bar{x})^2}{2!} + \ldots$$

  - **Si $x-\bar{x}$ es pequeño:**

$$y = \bar{y} + K(x-\bar{x})$$

donde:

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

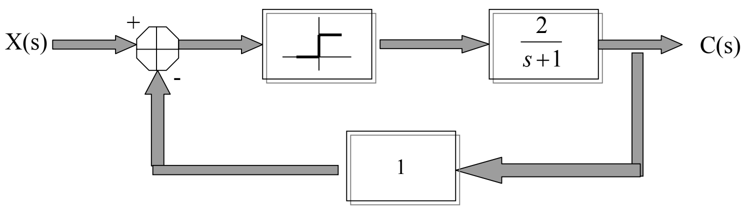
$$K = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis de Sistemas de Control no Lineal

- **Ejemplo 1: Controlador todo-nada**

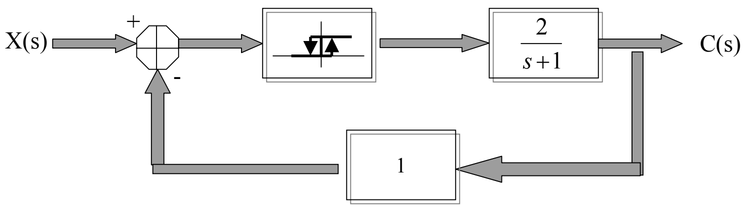


Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis de Sistemas de Control no Lineal

- **Ejemplo 2: Controlador todo-nada con histéresis**

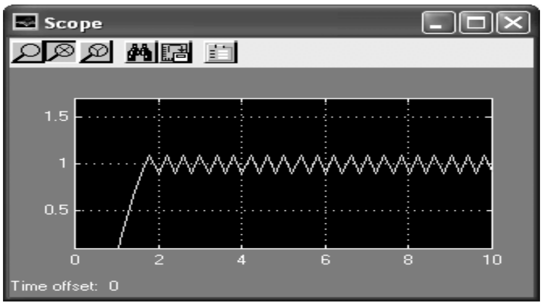


Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis de Sistemas de Control no Lineal

- **Simulación controlador todo-nada con histéresis**



Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis en el espacio de Estados

- **Resolución de la ecuación de estados lineal**

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

  - **Resolución de la Ecuación de estados homogénea**
    - **Resolución ecuación escalar:**

$$\dot{x} = ax$$
$$x(t) = e^{at}x(0)$$

    - **Resolución ecuación matricial:**

$$\dot{x} = \mathbf{A}x$$
$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}x(0)$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis en el espacio de Estados

- **Propiedades de la matriz exponencial**

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{A}s}$$

$$e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$$

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{A}$$

- **Aplicación de la transformada de Laplace para la resolución de la ecuación invariante en el tiempo**
  - **Caso escalar**

$$x(t) = \mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)x(0)$$

  - **Caso matricial**

$$x(t) = \mathrm{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]x(0)$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis en el espacio de Estados

- **Resolución de la Ecuación de estados no homogénea**

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

- **Resolución ecuación escalar:**

$$\dot{x} = ax + bu$$

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau$$

- **Resolución ecuación matricial:**

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathrm{B}u$$

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}x(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis en el espacio de Estados

- **Ejemplo I: Obtener la respuesta ante un escalón unitario del sistema:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

- **Solución ecuación de estados:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- **Ecuación de salida:**

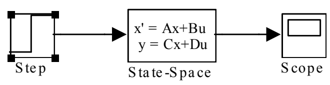
$$y = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$$

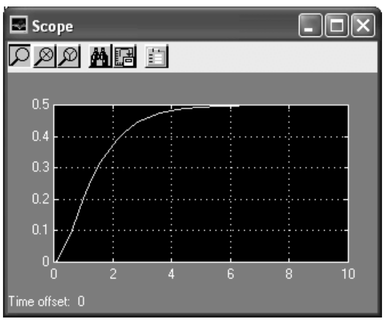
Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Análisis en el espacio de Estados

- **Simulación con simulink y gráfica de la salida:**





Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Controlabilidad y Observabilidad:**
  - **Condición necesaria y suficiente para controlabilidad completa de estado:**

$$M = [B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots \mid A^{n-1}B] \quad (n \times nr)$$

$$rango(M) = n$$

  - **Controlabilidad de la salida**

$$S = [CB \mid CAB \mid CA^2B \mid \ldots \mid CA^{n-1}B \mid D] \quad m \times (n+1)r$$

$$rango(S) = m$$

  - **Observabilidad completa**

$$E = [C^T \mid A^TC^T \mid (A^T)^2C^T \mid \ldots \mid (A^T)^{n-1}C^T] \quad (n \times nm)$$

$$rango(E) = n$$

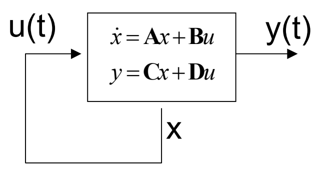
Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Diseño en el espacio de estados mediante bicación arbitraria de polos:**
  - **Control mediante realimentación de estados:**

$$u = -\mathbf{K}x$$

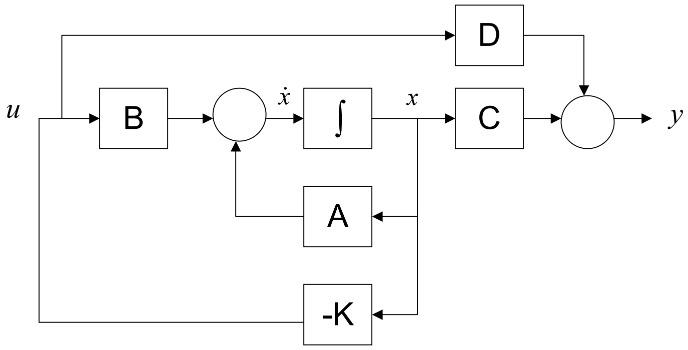


Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- Diagrama de bloques completo:



Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- Pasos para la ubicación arbitraria de polos:
  - 1. Comprobar la controlabilidad completa del sistema

$$M = [B \mid AB \mid A^2B \mid ... \mid A^{n-1}B] \quad (n \times nr)$$

$$rango\,(M) = n$$

  - 2. Obtener el polinomio característico del sistema

$$\left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} \right| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_{n-1}s + a_n$$

  - 3. A partir de los polos deseados, obtener el polinomio característico deseado del sistema

$$\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}$$

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)...(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + ... + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

  - 4. Obtener la matriz de transformación

$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_{n-2} & a_{n--3} & \dots & 1 & 0 \\ a_{n-3} & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **5. Obtener la matriz de realimentación K como:**

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \,|\, \alpha_{n-1} - a_{n-1} \,|\, \alpha_{n-2} - a_{n-2} \,|....|\, \alpha_1 - a_1] \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Ejemplo:**

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

- **Polos deseados**

$$s = -2 \pm j4 \qquad M_p = 0.2$$

$$s = -10 \qquad t_s = 1.55s$$

Control

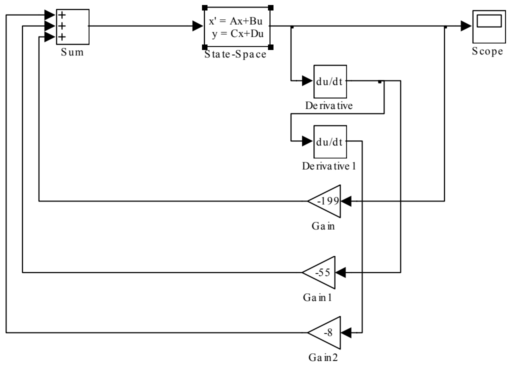
Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Matriz de realimentación de estados:**

$$K = [199 \quad 55 \quad 8]$$

- **Modelo simulink:**



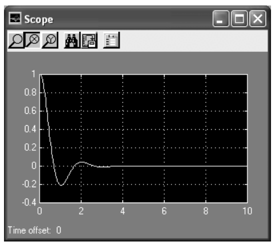
Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

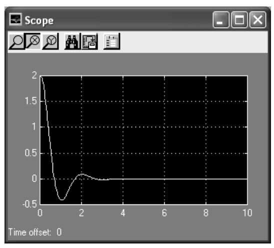
- **Simulación, estado inicial**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



- **Simulación, estado inicial**

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

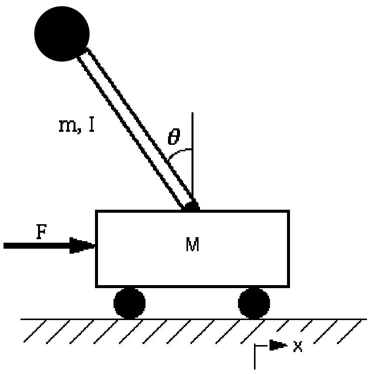


Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Ejemplo: Péndulo invertido**



$$M = 2\ kg$$
$$m = 0.1\ kg$$
$$l = 0.5\ m$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Ecuaciones de estado**

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta} \quad x_3 = x \quad x_4 = \dot{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{M+m}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Valores numéricos**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u$$

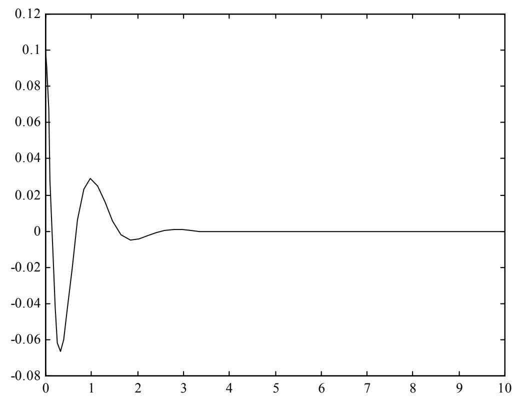
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Respuesta ante una perturbación en ángulo (θ_i=0.1, x_i=0)**
  - **Ángulo en función del tiempo**

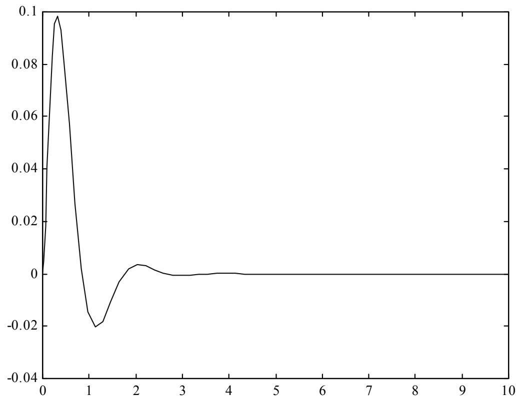


Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- Respuesta ante una perturbación en ángulo (θ_i=0.1, x_i=0)
  - **Posición en función del tiempo**

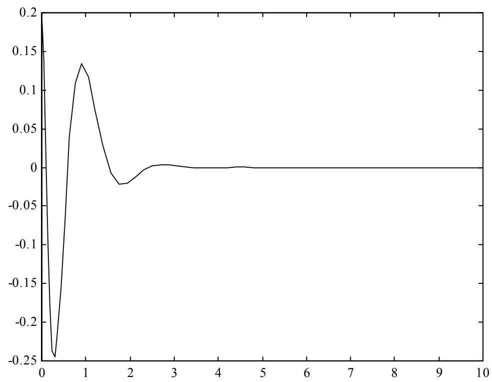


Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- Respuesta ante una perturbación en posición y ángulo (θ_i=0.2, x_i=0.2)
  - **Ángulo en función del tiempo**

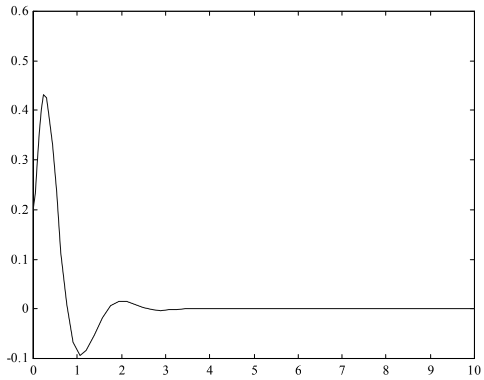


Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño en el espacio de Estados

- **Respuesta ante una perturbación en posición y ángulo (θ_i=0.2, x_i=0.2)**
  - **Posición en función del tiempo**



Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

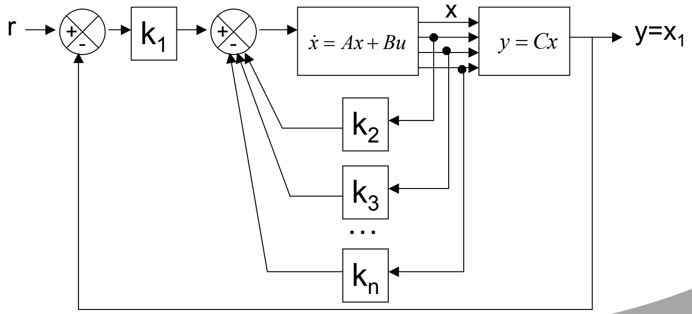
Diseño de servosistemas

- **Servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador**
  - **Suponiendo para la planta:**

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x$$

  - **El esquema de realimentación sería:**



Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño de servosistemas

- **Si r es una entrada escalón, la dinámica del error queda:**

$$\dot{e} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})e$$

- **La matriz K se calcula como en un sistema regulador, mediante ubicación arbitraria de polos**
- **Ejemplo:**

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

$$s = -2 \pm j\sqrt{3} \qquad M_p = 0.16$$

$$s = -10 \qquad t_s = 1.6s$$

Control

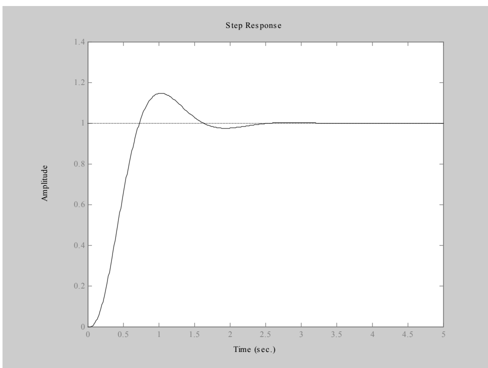
Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño de servosistemas

- **La matriz de realimentación resultante es:**

$$K = [160 \quad 54 \quad 11]$$

- **Respuesta a un escalón unitario:**



Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

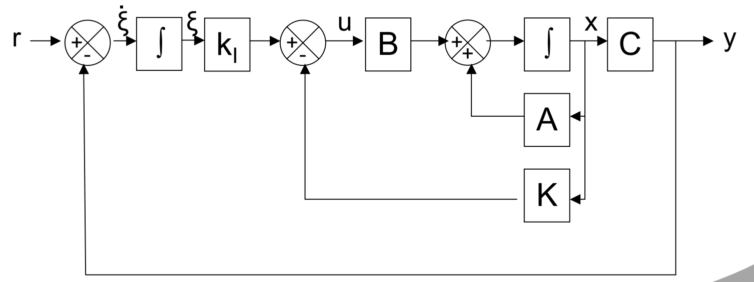
Diseño de servosistemas

- **Servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador**
  - **Suponiendo para la planta:**

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x$$

  - **El esquema de realimentación sería:**



Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño de servosistemas

- **Nueva variable de estado, ξ -> n+1 variables de estado. Ecuaciones de estado:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

- **Definiendo:**

$$x_e(t) = x(t) - x(\infty)$$

$$\xi_e(t) = \xi(t) - \xi(\infty)$$

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty)$$

- **Si el sistema es asintóticamente estable:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño de servosistemas

- Por otra parte:

$$u_e(t) = -\mathbf{K}x_e(t) + k_I \xi_e(t)$$

- **Definiendo:**

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \mid -k_I] \qquad e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}$$

- Nos queda la siguiente ecuación para el sistema:

$$\dot{e} = \hat{\mathbf{A}}e + \hat{\mathbf{B}}u_e$$

- Con realimentación de estados:

$$u_e(t) = -\hat{\mathbf{K}}e(t)$$

- Se diseña finalmente con ubicación arbitraria de polos

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño de servosistemas

- En este caso la controlabilidad completa se comprueba con la matriz:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$rango(\hat{\mathbf{M}}) = n + 1$$

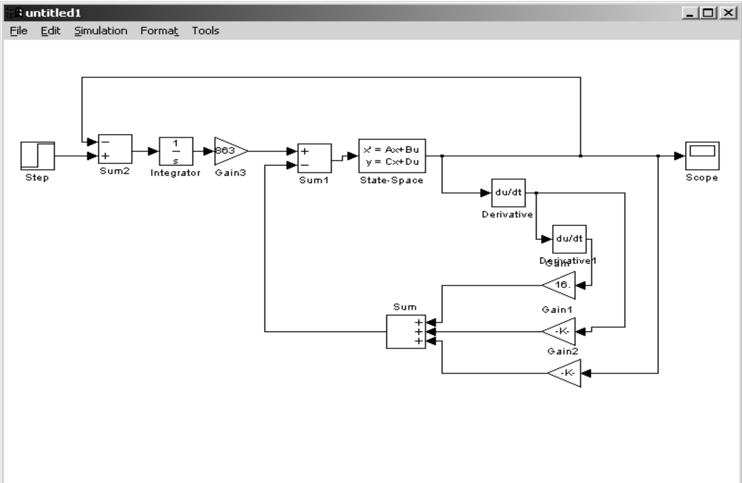
- Ejemplo: Problema 9 de la relación II

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño de servosistemas

- **Problema 9**
  - **Diseño simulink**

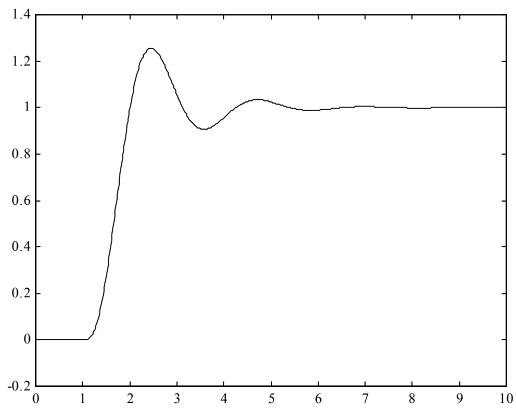


Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Diseño de servosistemas

- **Simulación**



Sistemas de control óptimo cuadrático

- **Sistemas de Control óptimo cuadrático**
  - **Dado un sistema de control en el espacio de estados:**

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

  - **Se desea seleccionar el vector de control *u(t)* de manera que se minimice un índice de desempeño**
  - **Si se utiliza un índice *J* tal que**

$$J = \int_0^\infty L(x,u)dt$$

donde *L(x,u)* es una función cuadrática de *x* e *u*

  - **Relación lineal mediante una matriz K**

$$u(t) = -\mathbf{K}x(t)$$

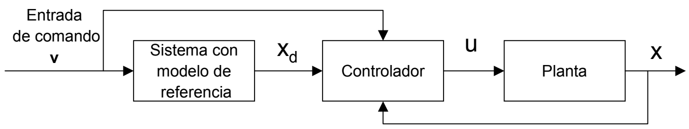
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{rn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sistemas de control con modelo de referencia

- **Sistemas de Control con modelo de referencia**
  - **Dado un sistema de control no lineal en el espacio de estados:**

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$

  - **Se utiliza el siguiente esquema para el sistema de control**



  - **Y se utiliza un sistema con modelo de referencia lineal, descrito por:**

$$\dot{x}_d = \mathbf{A}x_d + \mathbf{B}v$$

Control

Tema II: Análisis y Diseño de Sistemas de Control

Sistemas de Control Adaptable

- Sistemas de control adaptable (o adaptativo)
  - Los parámetros del sistema de control se modifican (se adaptan) de manera automática
  - No es necesario disponer de un modelo de la planta
  - Tratan de imitar el comportamiento humano al enfrentarse al control de una planta (Lógica borrosa, Redes Neuronales, etc)