

Tema 2:

TEOREMAS ENERGÉTICOS

Supongamos que las cargas aplicadas al sólido crecen, progresivamente, desde cero hasta su valor final de una manera continua.

En ese caso, el trabajo W realizado por todas las cargas que actúan sobre el sólido quedaría almacenado como energía elástica de deformación U en el sólido y, por tanto:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

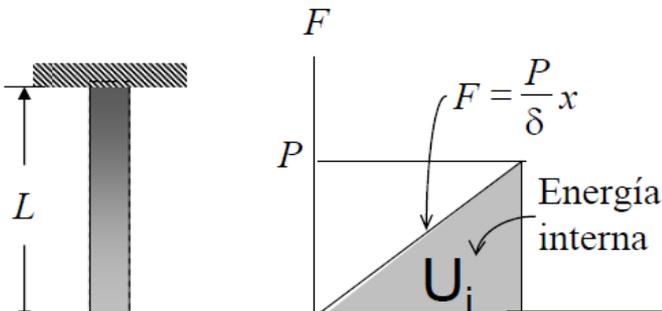
ENERGÍA INTERNA, ELÁSTICA O DE DEFORMACIÓN

Trabajo externo y energía de deformación

La mayoría de los métodos energéticos en el cálculo de estructuras se basan en el **Principio de la conservación de la energía**, que establece que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema estructural, W_e , coincide con la energía de deformación que almacena dicho sistema, U_i .

$$W_e = U_i$$

Trabajo de una fuerza exterior



$$dW_e = F dx$$

$$W_e = \int_0^x F dx$$

$$W_e = \int_0^{\Delta} \left(\frac{P}{\delta} x\right) dx$$

$$U_e = \left(\frac{P}{2\delta} x^2\right) \Big|_0^{\delta} = \frac{1}{2} P \delta$$

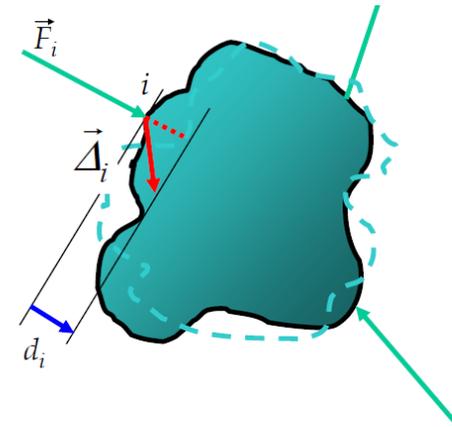
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ENERGÍA INTERNA, ELÁSTICA O DE DEFORMACIÓN

El trabajo realizado por las cargas exteriores aplicadas a un sólido es la mitad de la suma del producto de dichas cargas por los desplazamientos de sus puntos de aplicación (en las dirección de las mismas).



$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i$$

Si entre las cargas aplicadas existiera algún momento, bastaría con tener en cuenta que:

- donde se dijera fuerza se debería decir momento
- donde se dijera desplazamiento se debería decir giro
- donde se expresara trabajo ($W=Fd$, en el caso de

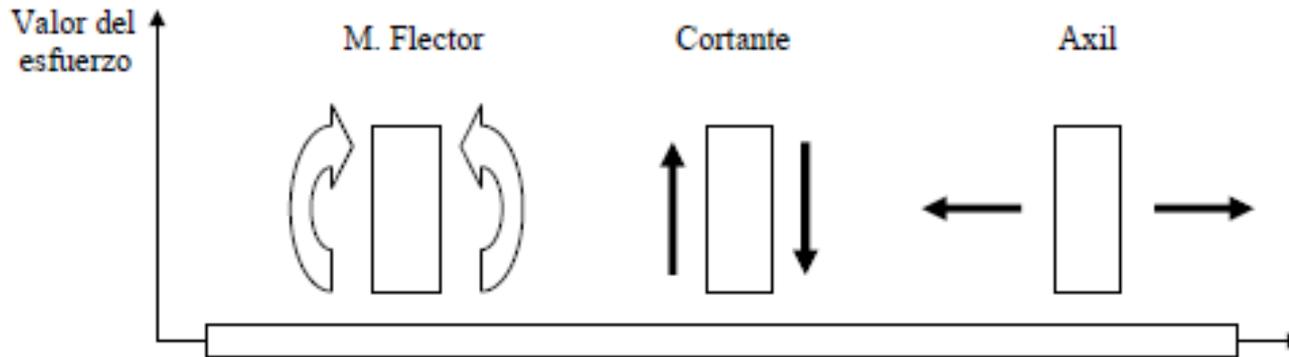
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

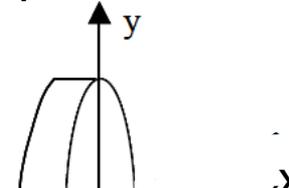
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

Esfuerzos en barras: criterio de signos



Energía de deformación en una rebanada: una rebanada en una pieza prismática o barra, es un segmento de la pieza delimitado por dos secciones (normales a la directriz de la pieza) y separadas una distancia ds . La rebanada es el elemento más pequeño que se identifica en la barra.



Cartagena99

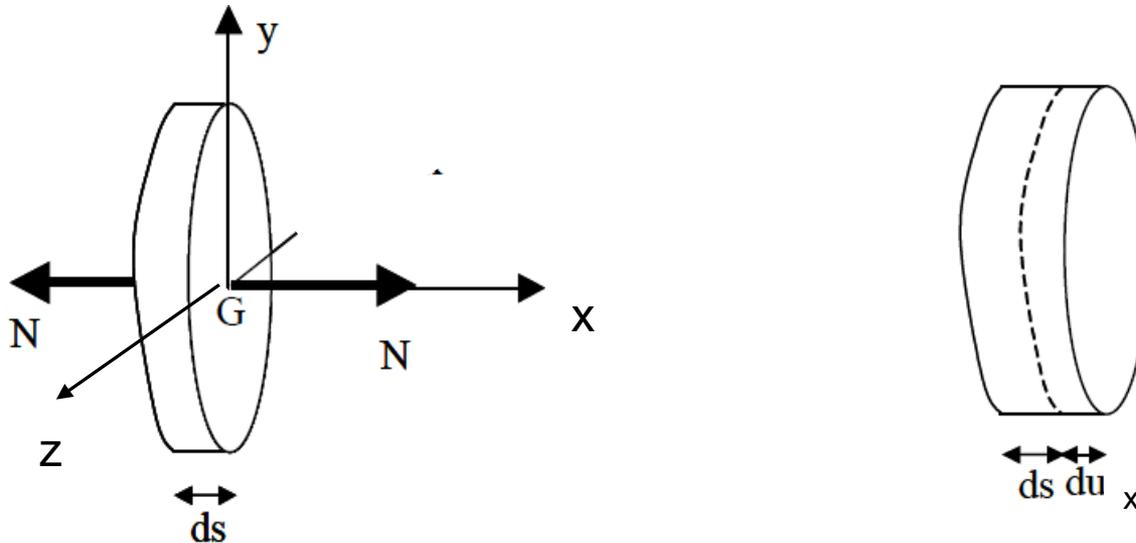
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ds

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR ESFUERZO AXIL



$$dU = \frac{1}{E} N \cdot du = \frac{1}{E} N^2 ds$$

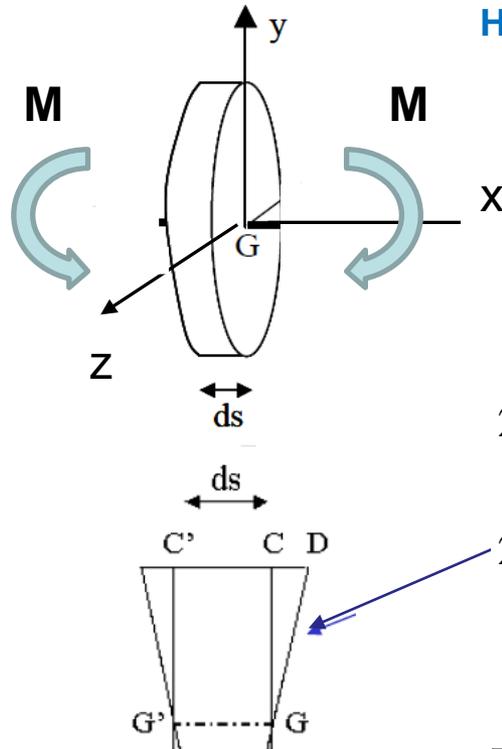
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR MOMENTO FLECTOR



HIPÓTESIS DE NAVIER

$$\sigma_A = \frac{M_z AG}{I_z} \quad \text{compresión}$$

$$\sigma_C = -\frac{M_z CG}{I_z} \quad \text{tracción}$$

$$\frac{d\theta_z}{2} = \frac{AB}{AG} = \frac{CB}{CG} = \frac{M_z}{2EI_z} ds$$

$$2AB = \varepsilon_{AA} ds = \frac{\sigma_A}{E} ds = \frac{M_z AG}{I_z} ds$$

$$2CD = \varepsilon_{CC} ds = \frac{\sigma_C}{E} ds = -\frac{M_z CG}{I_z} ds$$

$$d\theta_z = \frac{M_z}{EI_z} ds$$

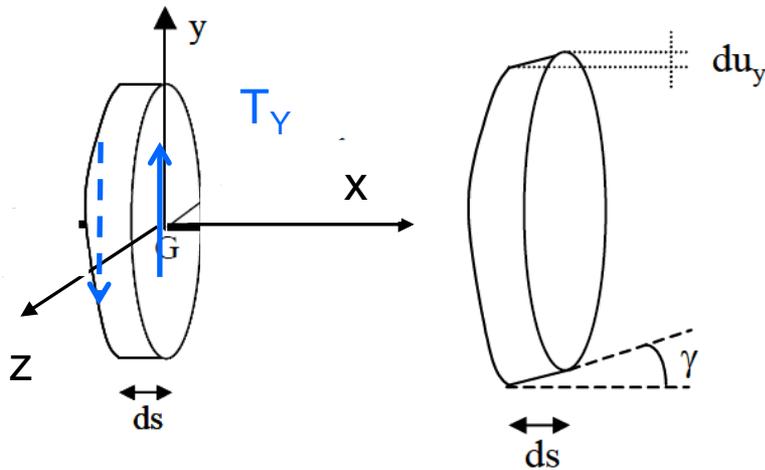
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR ESFUERZO CORTANTE



$$du_y = \gamma ds = \frac{\tau_m}{G} ds \quad \text{donde} \quad \tau_m = \frac{T_y}{A_c}$$

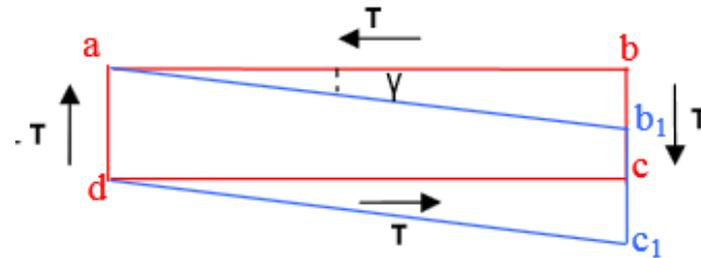
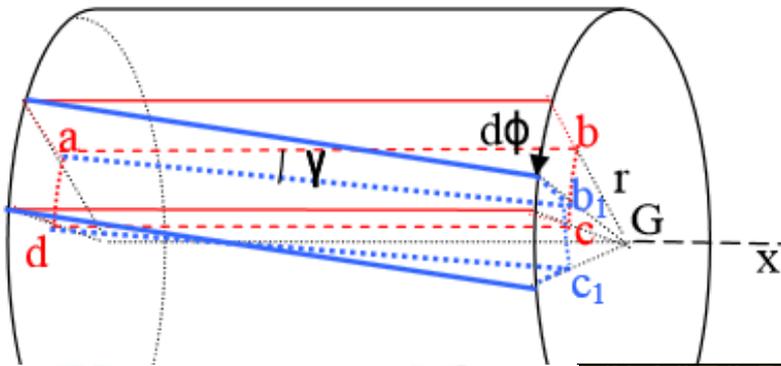
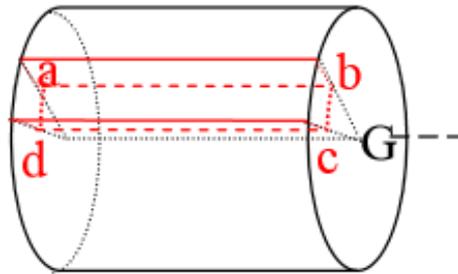
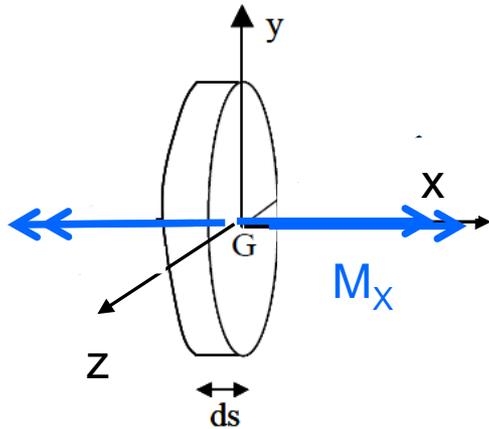
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR MOMENTO TORSOR



torsión $\theta = \frac{d\phi}{ds} = \frac{M_T}{GJ} \rightarrow d\phi = \frac{M_T}{GJ} ds$

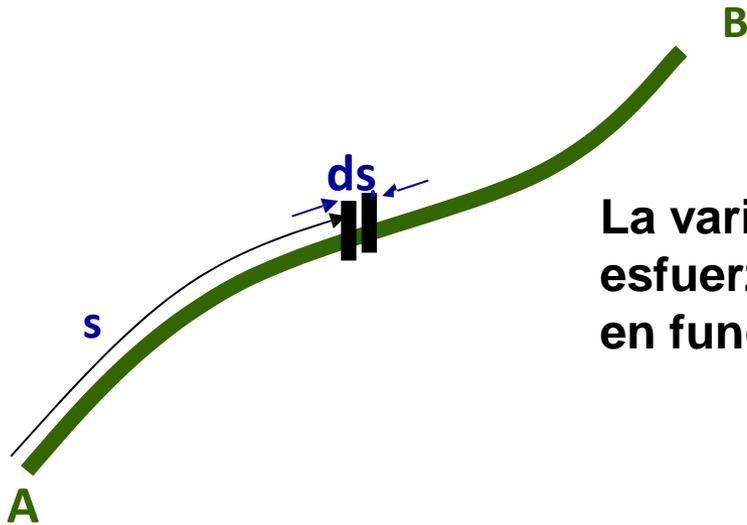
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

¿Qué energía interna se almacena en una pieza cargada en la que aparecen todos los tipos de esfuerzos en todas las secciones de la pieza?



La variable “s” del integrando indica que los esfuerzos pueden variar a lo largo de la pieza en función del valor de dicha variables

$$U = \int_A^B \left(1 N^2 + 1 T^2 + 1 M_f^2 + 1 M_T^2 \right) ds$$

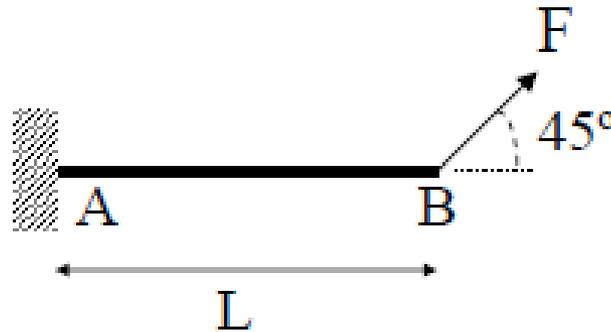
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

Ejemplo: ¿Podríamos calcular los ya desplazamientos en elementos estructurales cargados?



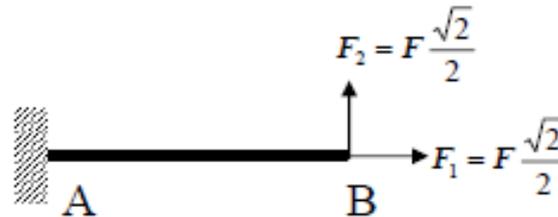
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

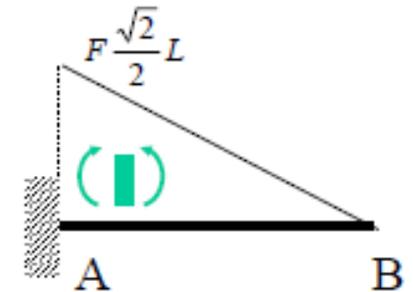
Ejemplo: ¿Podríamos calcular los ya desplazamientos en elementos estructurales cargados?



Ley de axiles



Ley de cortantes



Ley de flectores

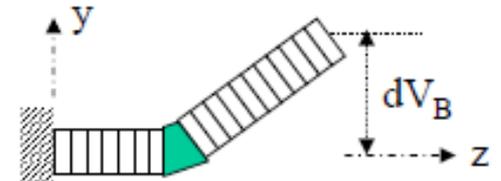
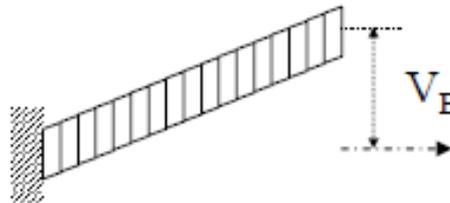
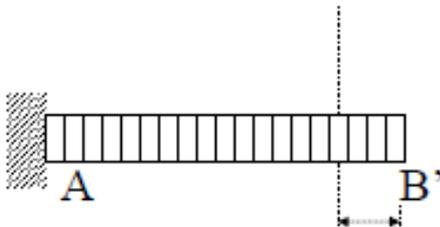
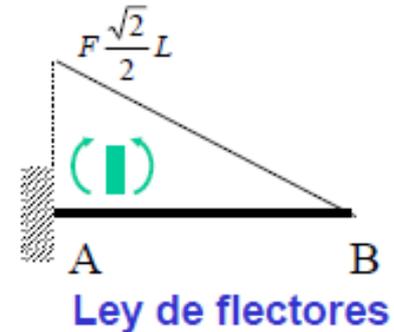
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

Ejemplo: ¿Podríamos calcular los ya desplazamientos en elementos estructurales cargados?



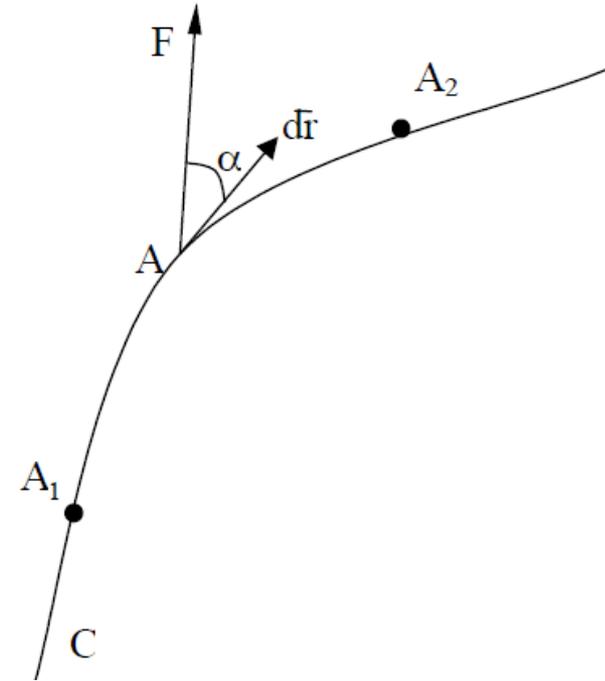
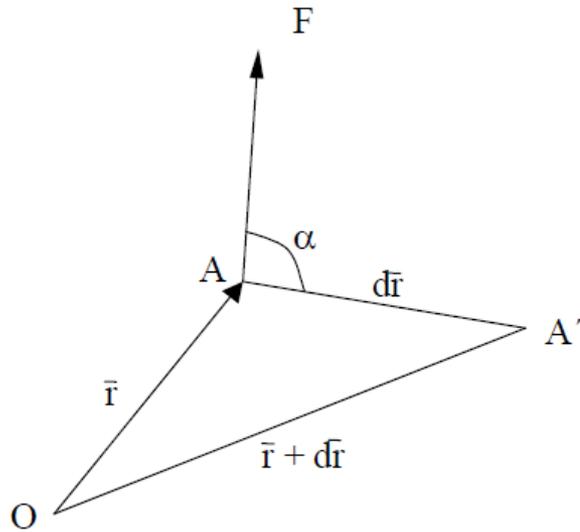
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

•Trabajo de una fuerza



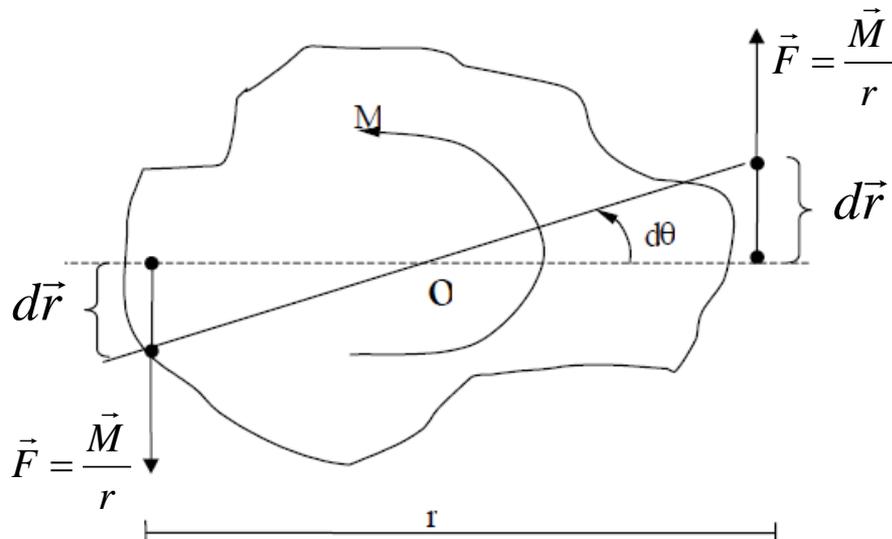
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

• Trabajo de un par (momento)



$$dW_1 = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr = F \frac{r}{2} \text{sen}(d\theta) \approx F \frac{r}{2} d\theta$$

$$dW_2 = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \frac{r}{2} d\theta$$

$$dW = dW_1 + dW_2 = 2F \frac{r}{2} d\theta = Fr d\theta = \frac{M}{r} r d\theta = M d\theta$$

$$W = \int_{A_1}^{A_2} dW = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

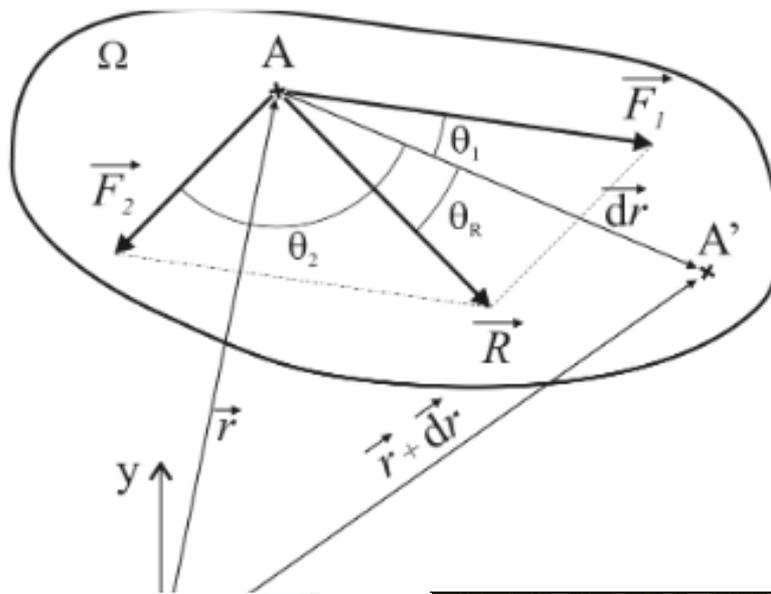
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

- **Trabajo de un sistema de fuerzas:** dado un sistema de fuerzas como el que se muestra en la figura, el trabajo desarrollado por un sistema de fuerzas aplicado sobre una partícula o cuerpo que sufre un desplazamiento es igual al trabajo de su resultante.



$$\begin{aligned}dW &= dW_1 + dW_2 + \dots + dW_n = \\&= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = \\&= \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \vec{R} \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

Cartagena99

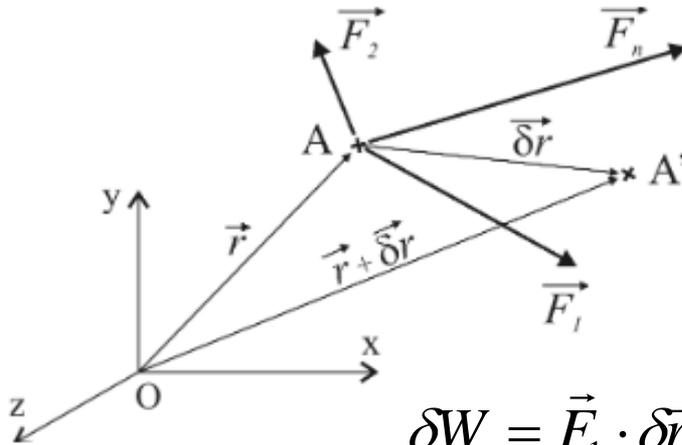
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

- PTV para sólidos rígidos:

Una partícula, sistema de fuerzas, desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$



$$\delta W = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot \delta\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r} = \vec{R} \cdot \delta\vec{r}$$

$$\vec{R} = \vec{0} \rightarrow \delta W = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

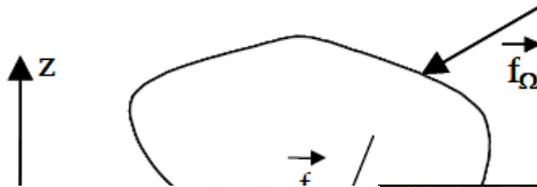
Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

- PTV para sólidos rígidos:

UN SÓLIDO RÍGIDO, sistema de fuerzas, movimiento virtual $\delta\vec{r}$

*Si un **sólido rígido** está en **equilibrio** bajo la acción de un sistema de fuerzas, el trabajo virtual total de las fuerzas externas que actúan sobre él es cero para cualquier desplazamiento virtual del sólido”*

El principio de los trabajos virtuales es también aplicable a un sistema de sólidos rígidos unidos, si el sistema permanece unido durante el desplazamiento virtual, pues el trabajo de las fuerzas internas es cero.



Cartagena99

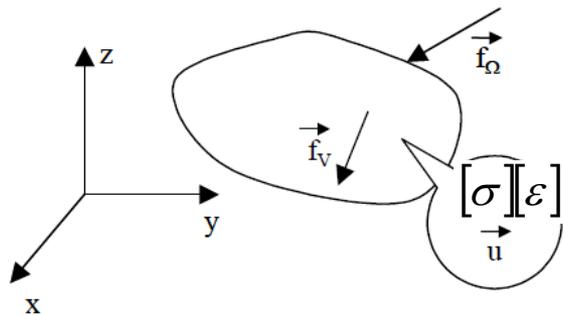
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

• PTV para sólidos deformables:

desplazamientos virtuales deformaciones virtuales



$\delta \vec{u}$

ε^δ

$$\begin{aligned}
 W^\delta &= \iiint_V \vec{f}_V \cdot \delta \vec{u} \, dVol + \iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \delta \vec{u} \, dSup = \\
 &= \iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\delta + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\delta + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\delta \right) dVol = \\
 &= U_i^\delta
 \end{aligned}$$

Sistemas de barras y elementos unidimensionales

$$W^\delta = \sum^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{u}_i + \sum^n \vec{R}_i \cdot \Delta \vec{u}_i = \int_L \left(N \delta u_x + T \delta u_y + M_f \delta \theta + M_T \delta \phi \right) ds =$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Teorema de Castigliano

- **Coefficientes de influencia:**
relación entre las fuerzas exteriores y las deformaciones
- **Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti:** $d_{ij}=d_{ji}$

• **Teoremas de Castigliano**

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i \qquad \frac{\partial U}{\partial d_n} = F_n$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teoremas energéticos: Teorema de Castigliano

- **Coefficientes de influencia:**
relación entre las fuerzas exteriores y las deformaciones
- **Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti:** $d_{ij}=d_{ji}$

Teoremas de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i \qquad \frac{\partial U}{\partial d_n} = F_n$$

↓ estructuras

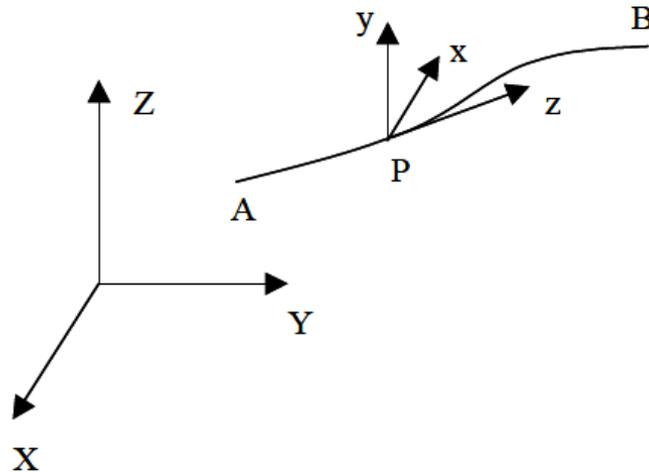
$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \int_A^B \left(\frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} + \frac{1}{2} \frac{T^2}{GA_C} + \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{EI_z} + \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{GI_0} \right) ds = d_i$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse



$$\vec{r} = \overrightarrow{PB}$$

Giro sólido rígido

Suma de giros de las rebanadas

Desplazamiento inducido por los giros de las rebanadas

$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \int_A^B d\vec{\theta}$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{r}_{AB} + \int_A^B d\vec{u} + \int_A^B d\vec{\theta} \wedge \vec{r}$$

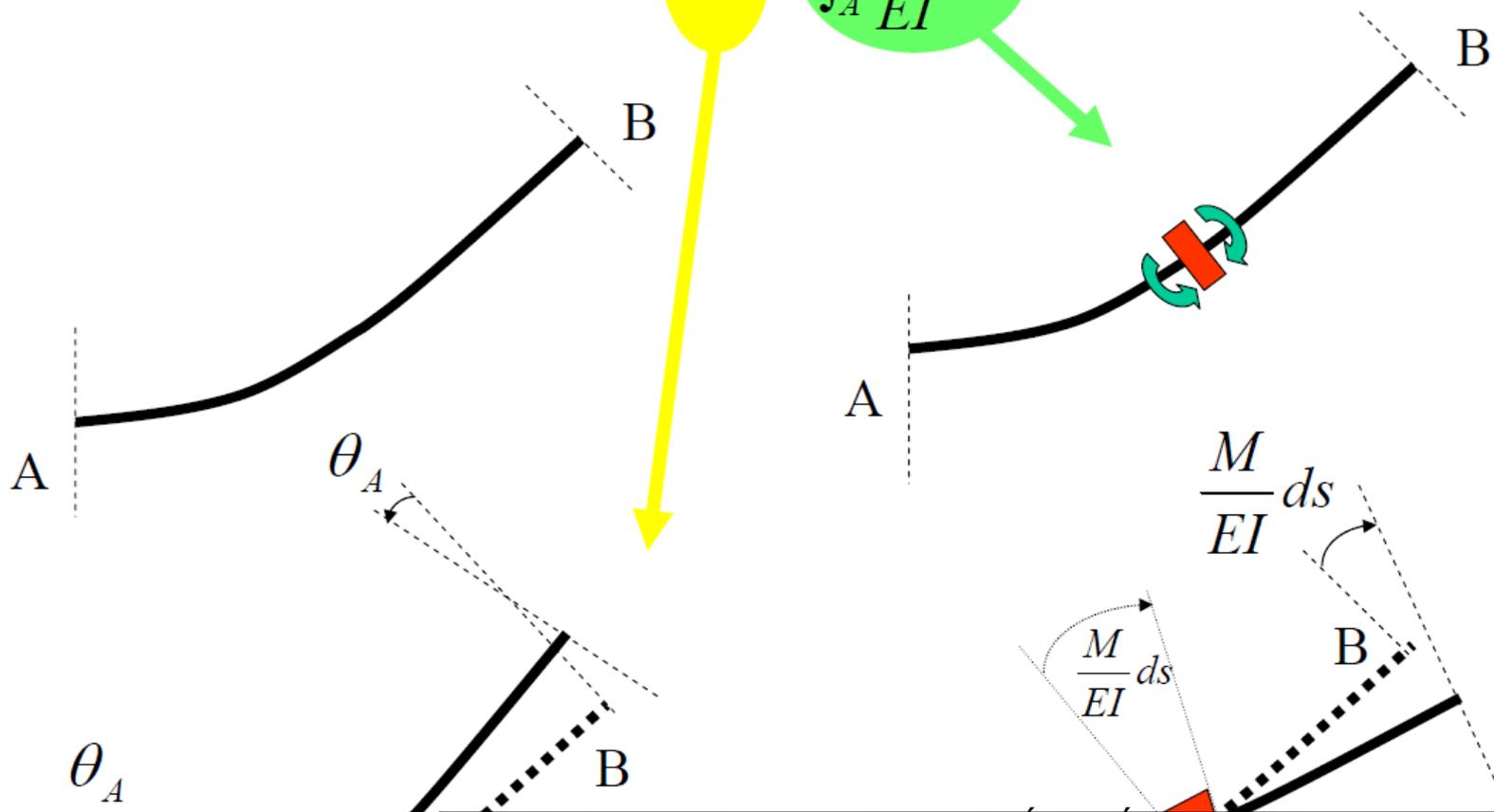
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} ds$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

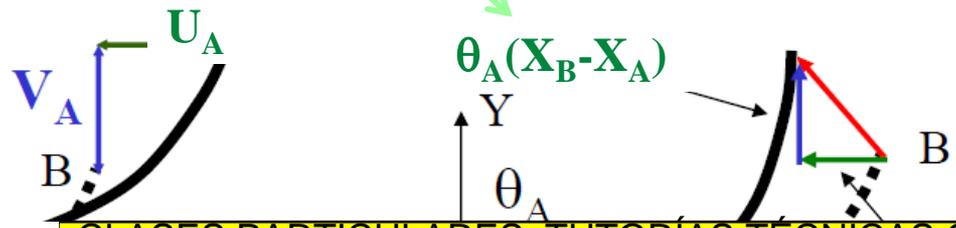
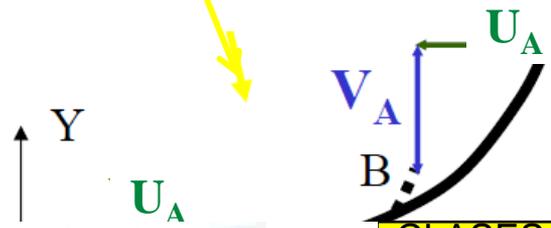
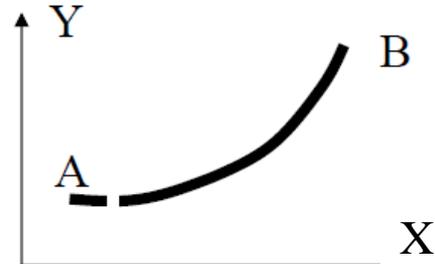
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$v_B = v_A + \theta_A(x_B - x_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dy - \frac{T}{GA_c} dx \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A(y_B - y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dx + \frac{T}{GA_c} dy \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (y_B - y) ds$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

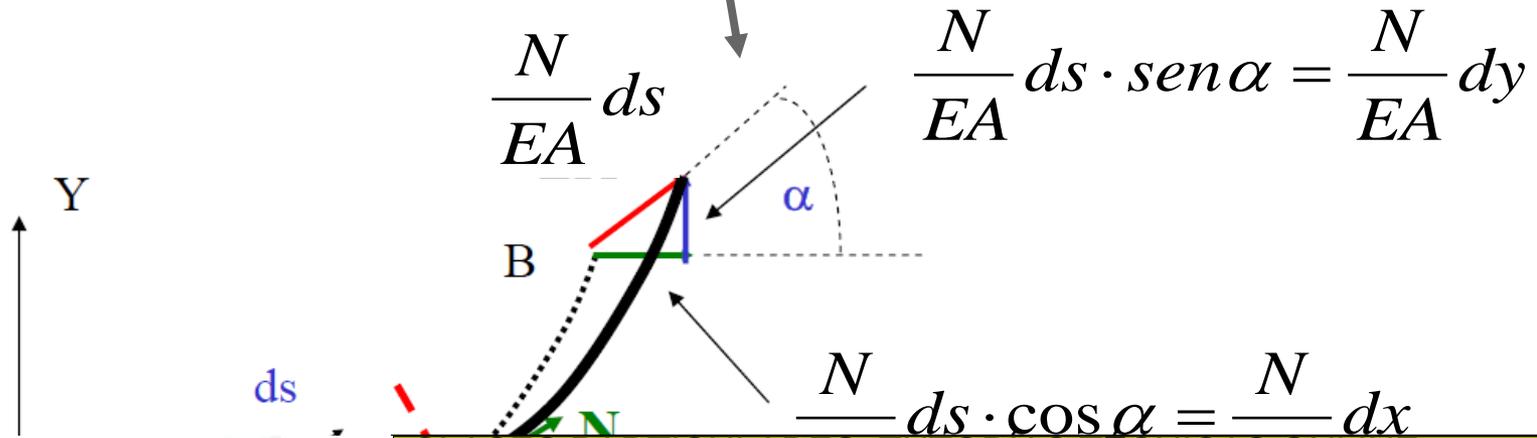
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dy - \frac{T}{GA_c} dx \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A (y_B - y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dx + \frac{T}{GA_c} dy \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (y_B - y) ds$$



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

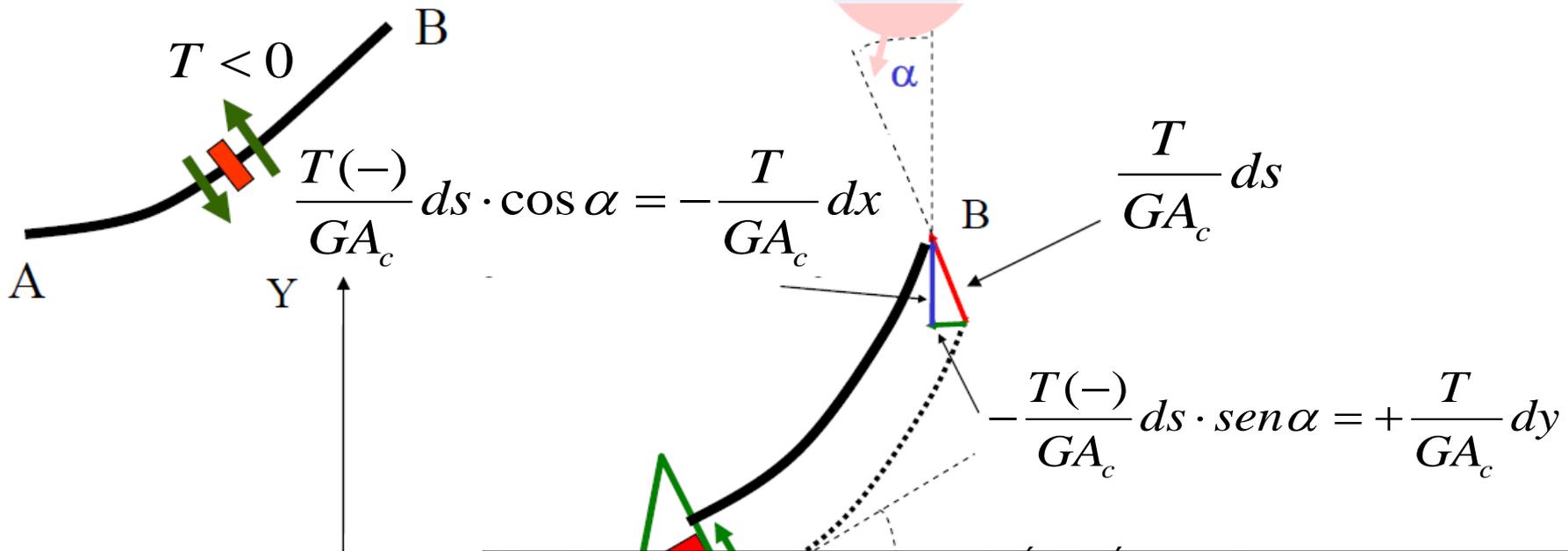
por axil

Cartagena99

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dy - \frac{T}{GA_c} dx \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A (y_B - y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dx + \frac{T}{GA_c} dy \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (y_B - y) ds$$



Cartagena99

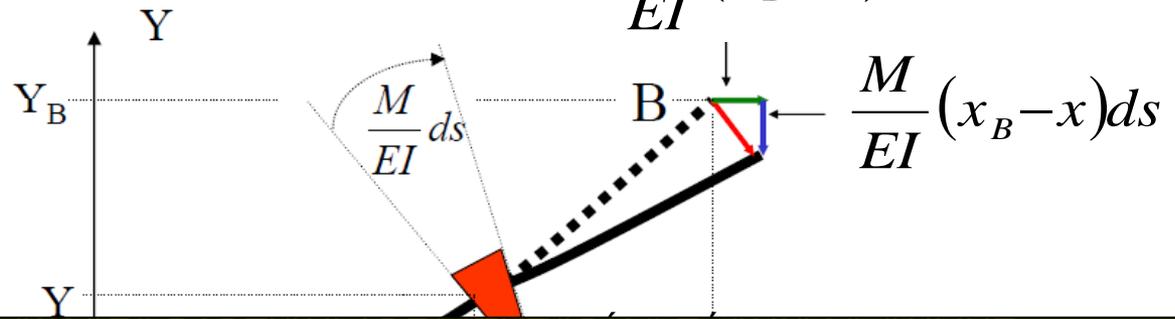
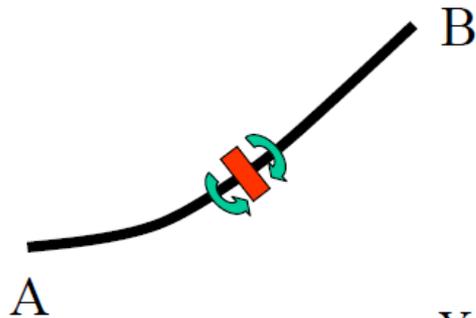
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dy - \frac{T}{GA_c} dx \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A (y_B - y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dx + \frac{T}{GA_c} dy \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (y_B - y) ds$$

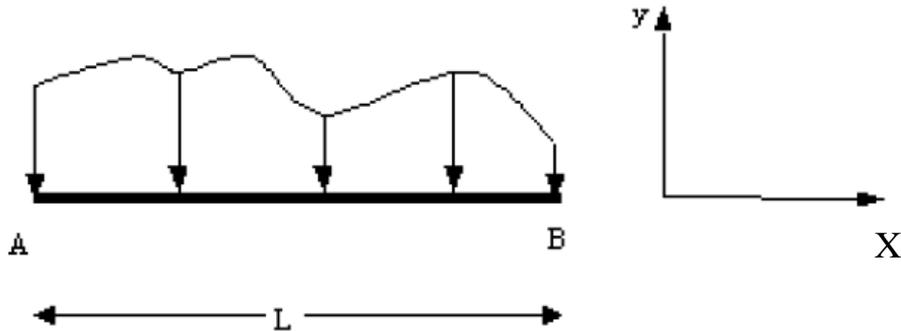


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: pieza recta con cargas en su plano



$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) - \int_A^B \frac{T}{GA_c} dx + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx$$

$$u_B = u_A + \int_A^B \frac{N}{EA} dx$$

En Cálculo de Estructuras se suele despreciar la contribución a los desplazamientos y giros debidos a los esfuerzos axil y cortante.

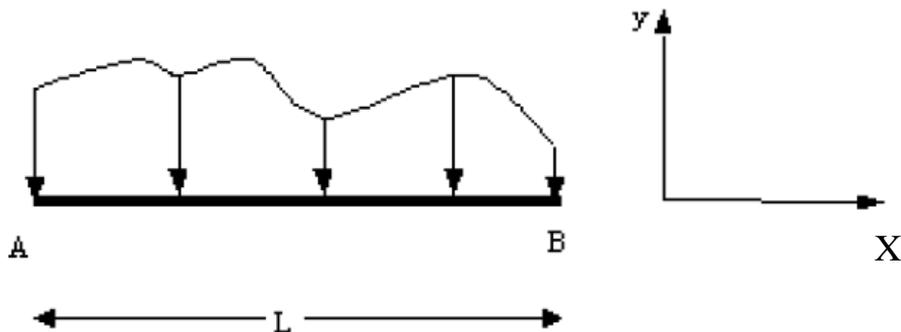
Esto, de ninguna manera, quiere decir que dichos esfuerzos sean nulos en la pieza.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: pieza recta en su plano



$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$v_B = v_A + \theta_A(x_B - x_A) - \int_A^B \frac{T}{GA_c} dx + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx$$

$$u_B = u_A + \int_A^B \frac{N}{EA} dx$$

En Cálculo de Estructuras se suele despreciar la contribución a los desplazamientos y giros debidos a los esfuerzos axil y cortante.

Esto, de ninguna manera, quiere decir que dichos esfuerzos sean nulos en la pieza.

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

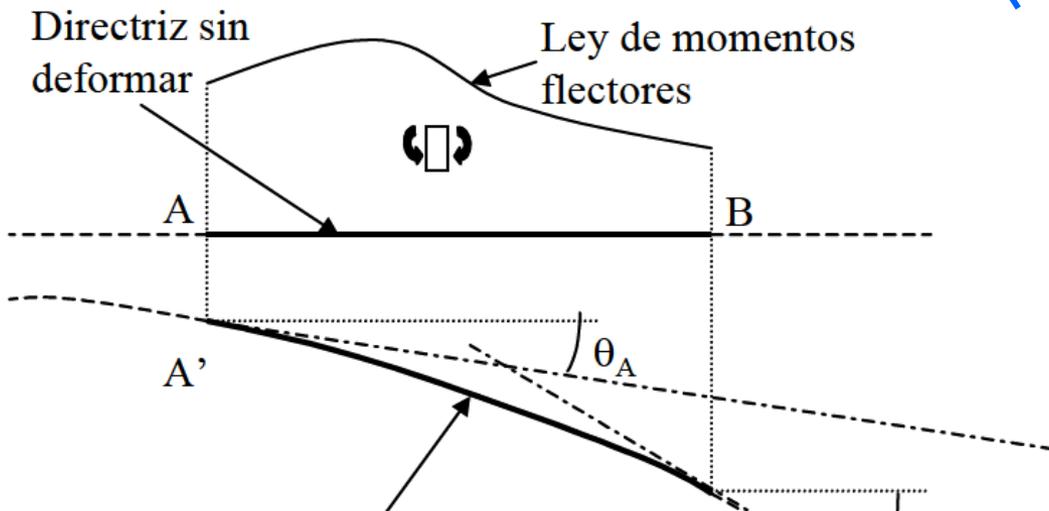
$$u_B = u_A$$

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

1er Teorema de Mohr

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx \rightarrow \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx = \frac{M_{AB}}{EI}$$

“El ángulo girado por la directriz entre dos secciones A y B de una pieza prismática recta de sección constante es igual al área del diagrama de momentos flectores entre ambas secciones dividido por el producto EI ”



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

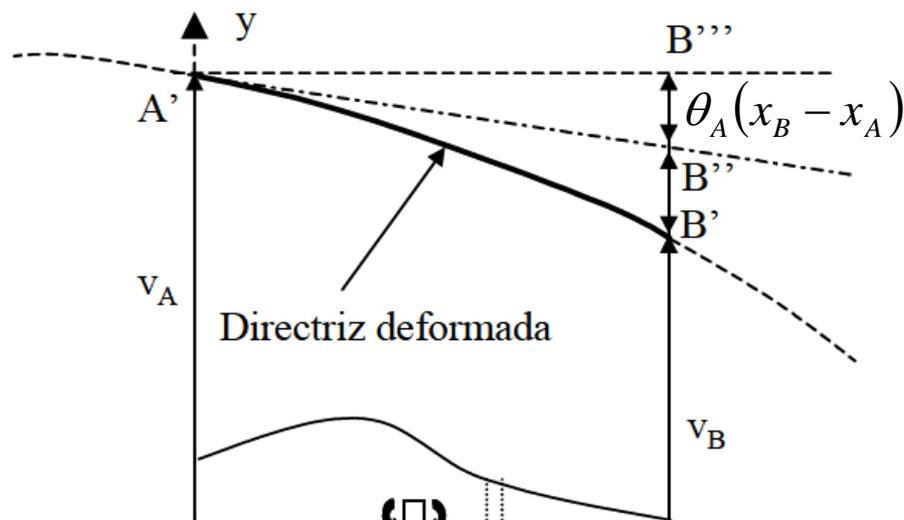
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

2º Teorema de Mohr

$$t_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx \rightarrow t_{B/A} = \frac{M_{AB}}{EI} d(\text{cdg}, B)$$

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx \rightarrow v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \frac{M_{AB}}{EI} d(\text{cdg}, B)$$



“La distancia, en dirección perpendicular a la directriz sin deformar, entre un punto B' de la directriz deformada a la recta tangente a la directriz deformada en otro (A) es igual al momento estático del área de momentos flectores

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

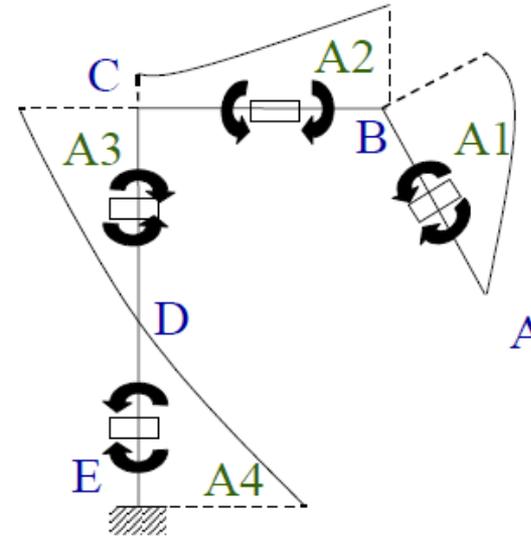
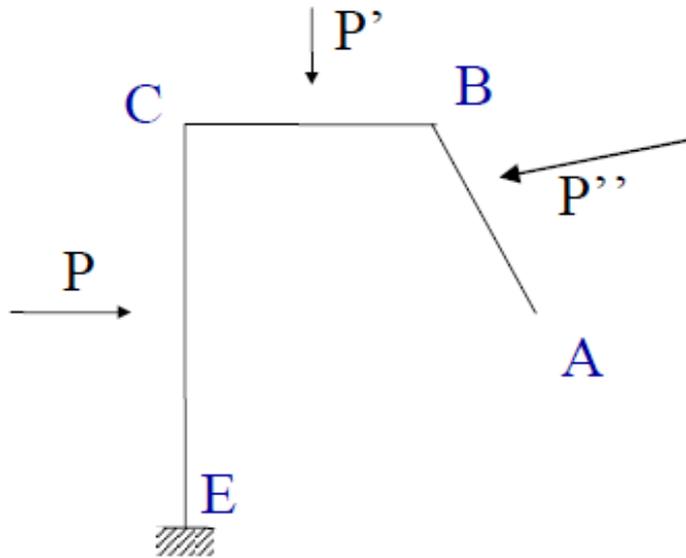
Directriz sin

en $x_B - x$

para por el punto B, dividido por el producto EI”

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos



θ_A ???

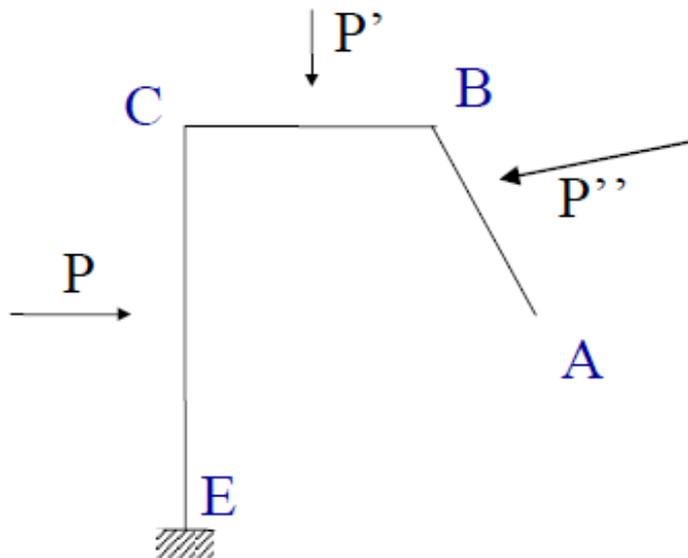
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

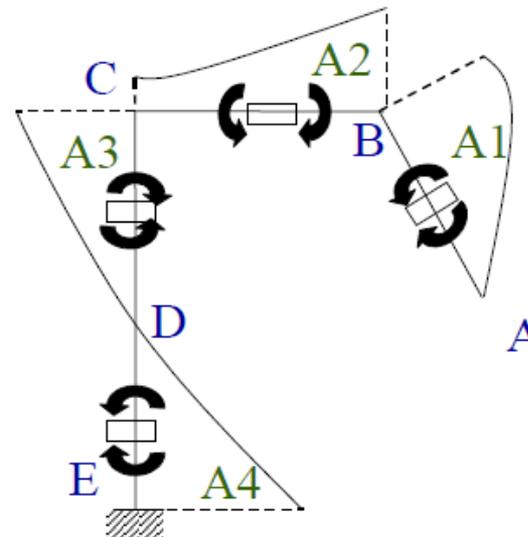
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos



θ_A ???



$$\theta_A - \theta_E = \theta_{AB} + \theta_{BC} + \theta_{CD} + \theta_{DE}$$

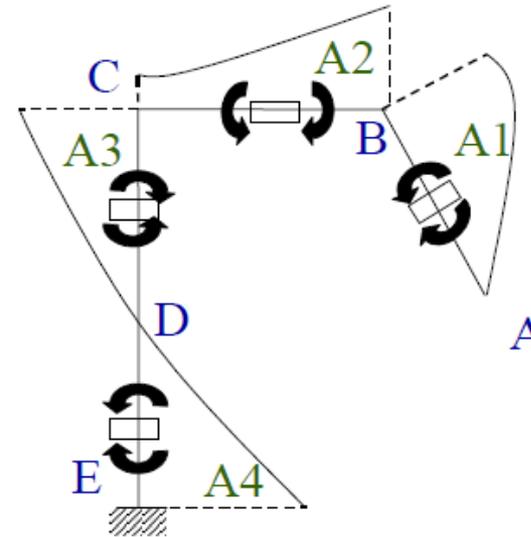
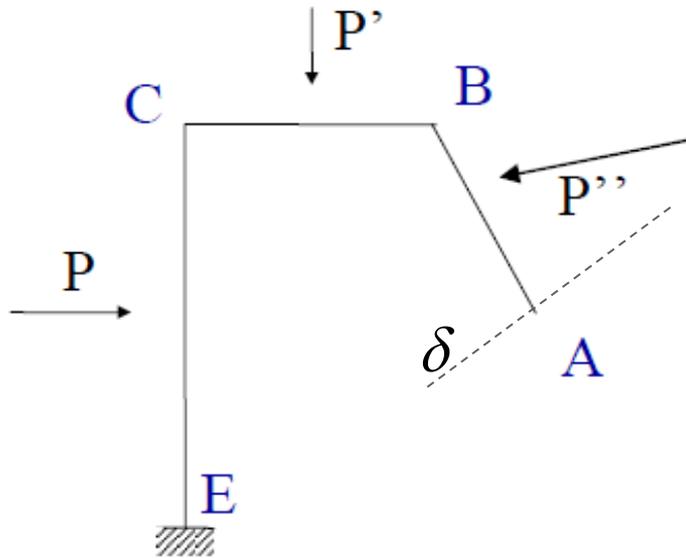
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos



δ_A ???

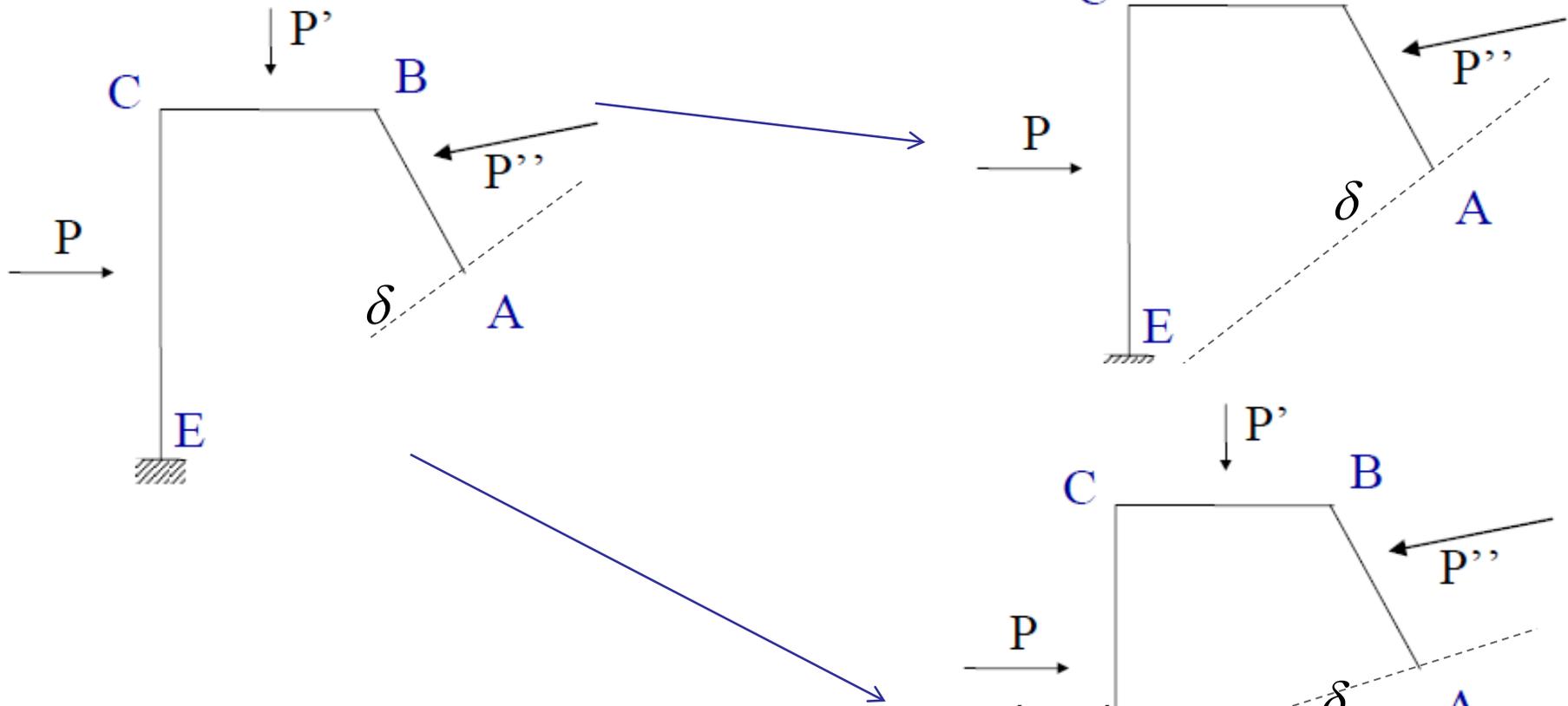
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos



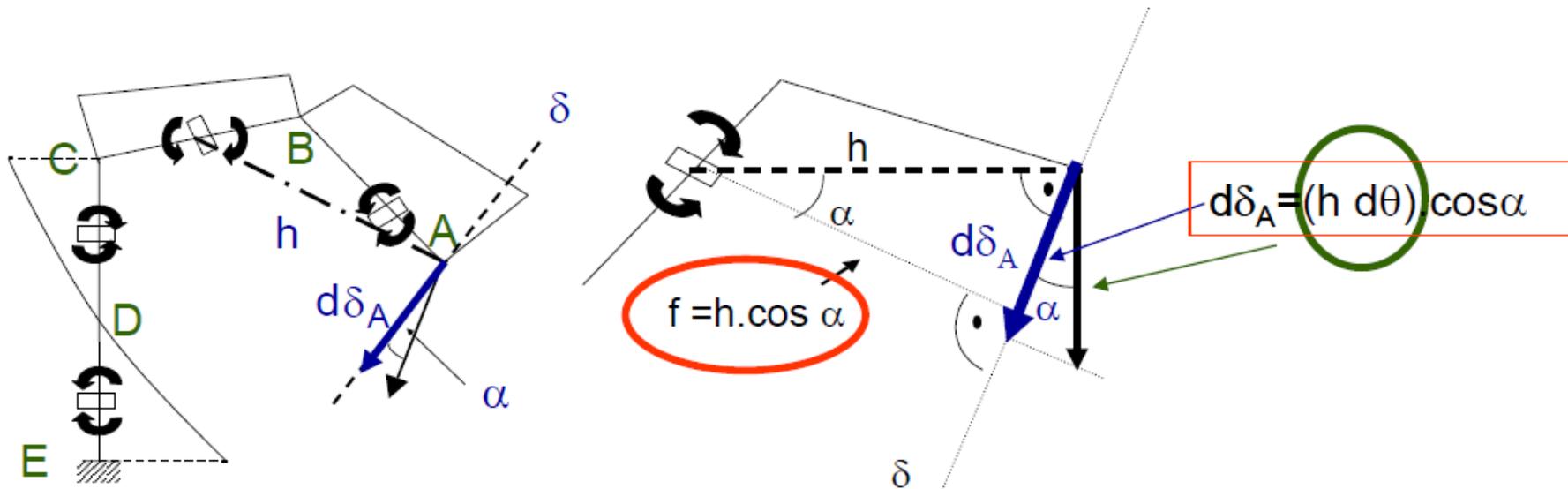
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos δ_A ???



$$d\delta_A = f d\theta = f \frac{M_f}{EI} ds$$

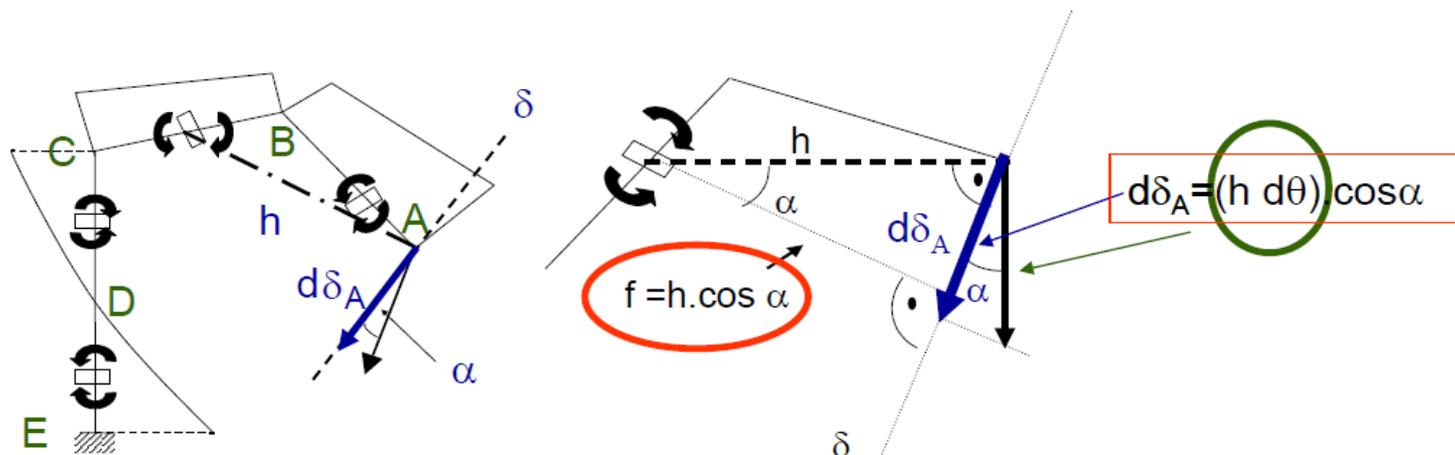
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos δ_A ???



$$d\delta_A = f d\theta = f \frac{M_f}{EI} ds$$

$$\delta_A = \int f d\theta = \int f \frac{M_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int f M_f ds$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

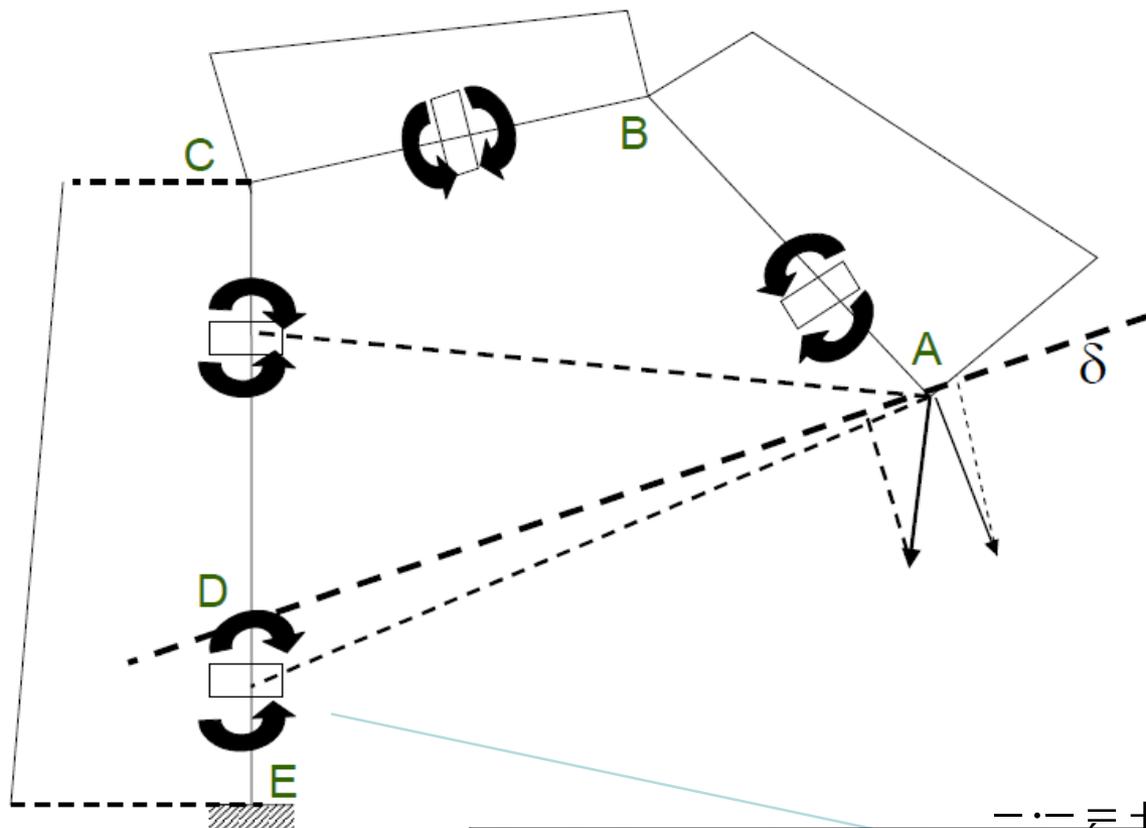
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$(EI)_{AB}$ $(EI)_{BC}$ $(EI)_{CD}$ $(EI)_{DE}$

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos δ_A ???



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

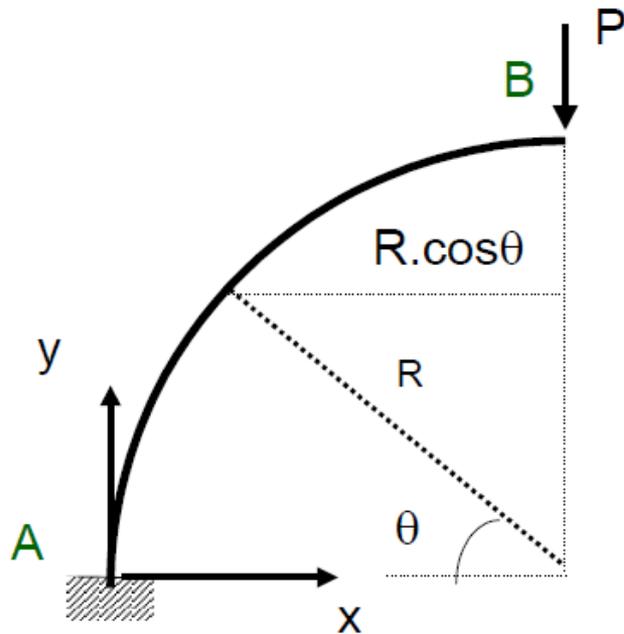
δ_{AB}

δ_{BC}

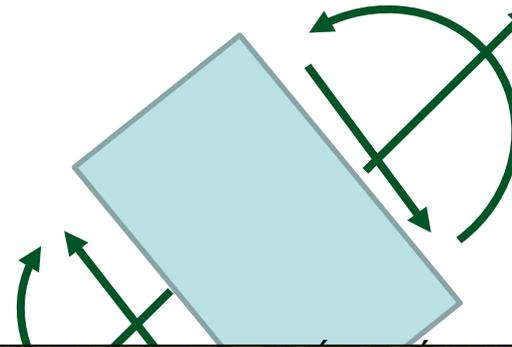
δ_{CD}

δ_{DE}

Piezas de directriz curva: ARCOS



$$N = -P \cos \theta$$
$$T = P \sin \theta$$
$$M = -PR \cos \theta$$



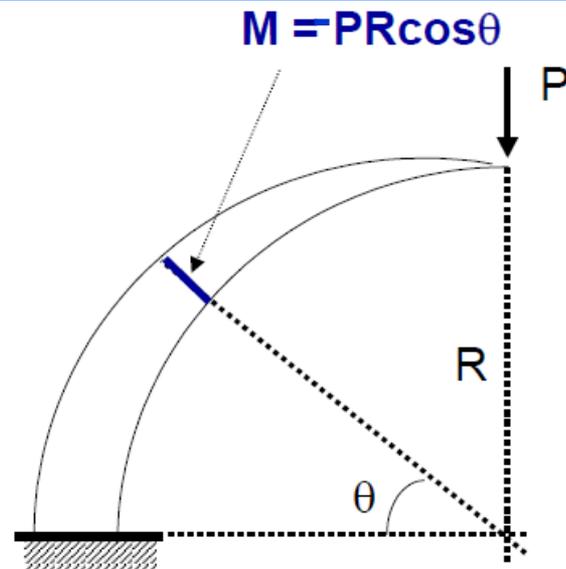
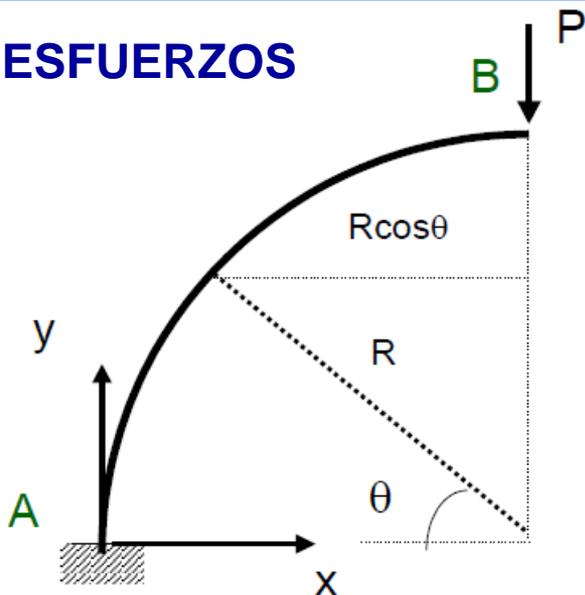
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

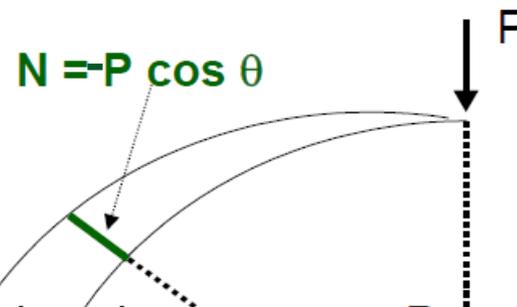
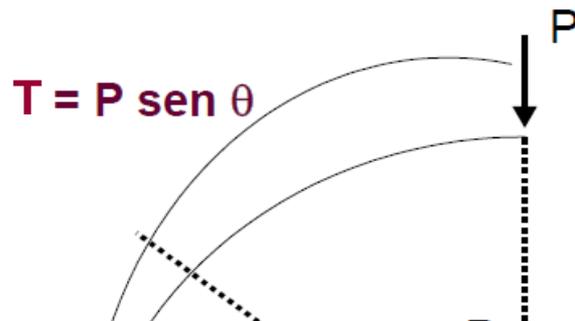
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Piezas de directriz curva: ARCOS

LEYES DE ESFUERZOS



Momentos flectores



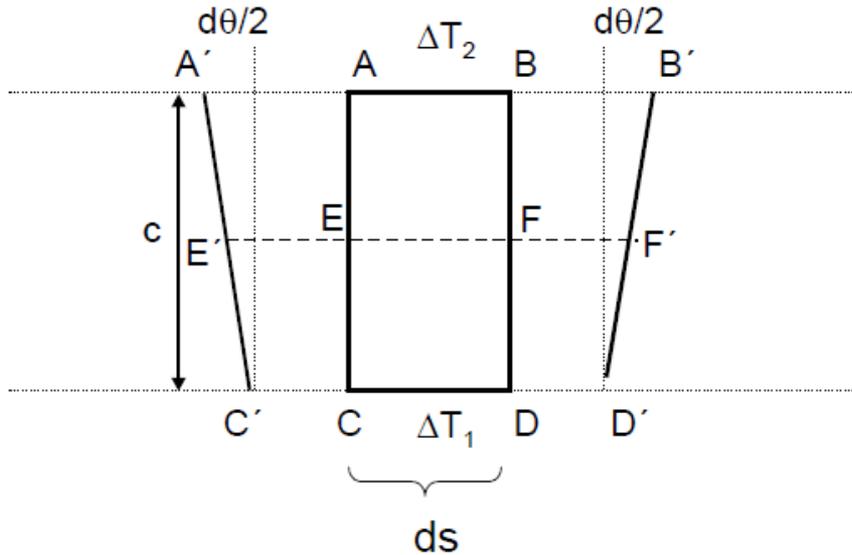
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas energéticos: Cargas térmicas

Deformación de una rebanada



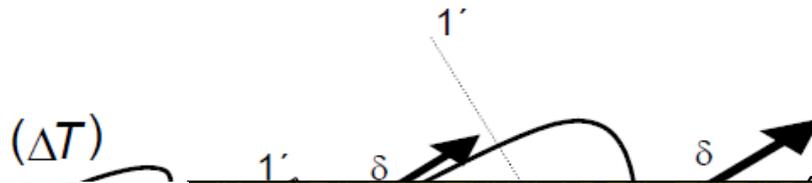
Alargamiento o acortamiento:

$$EE' + FF' = \alpha ds \frac{\Delta T_2 + \Delta T_1}{2}$$

Giro:

$$d\theta = \frac{-\alpha ds}{c} (\Delta T_2 - \Delta T_1)$$

Barras de directriz curvilínea sometidas a una variación uniforme de temperatura



“El movimiento en una dirección definida por un vector, del extremo de una barra curvilínea en ménsula se obtiene multiplicando el coeficiente de dilatación por el cambio de temperatura y el momento de inercia de la barra.”

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$u_{\delta} = \int (\alpha ds \Delta T) \cos \theta = \alpha \Delta T \int (ds) \cos \theta = \alpha \Delta T L$$