Tema 4: Autómatas Finitos

tas Finitos. Bibliografía

Alfonseca, J. Sancho y M. Martínez. “Teoría de Lenguajes,
máticas y Autómatas”, R.A.E.C., Madrid, (1998).

sasi, P. Martínez y D. Borrajo. “Lenguajes, Gramáticas y
ómatas, un Enfoque Práctico”. Addison-Wesley, (1997).

ernández y F. Sáez. “Fundamentos de Informática (Lógica,
ómatas, Algoritmos y Lenguajes)”. Anaya, (1995).

atas Finitos. Definiciones

Autómatas Finitos son de dos tipos:

Deterministas:

- cada combinación **(estado, símbolo de entrada)** produce un solo **(estado)**

No Deterministas:

- cada combinación **(estado, símbolo de entrada)** produce varios **(estado1, estado 2, ..., estadoi)**
- son posibles transiciones con λ

tas Finitos Deterministas. Definición

eterministas, AFD's: se definen mediante una

upla

Q, f, q_0, F), donde:

: alfabeto de entrada

: conjunto de estados, es conjunto finito no vacío,

ealmente un alfabeto para distinguir a los estados

$Q \times \Sigma \rightarrow Q$, función de transición

$_0 \in Q$, estado inicial

$\subset Q$: conjunto de estados finales o de aceptación

tas Finitos Deterministas. Representación

pueden representar mediante tablas de nsición o diagramas de transición

- Tablas de transición:
  - filas encabezadas por los estados ($q_i \in Q$)
  - columnas encabezadas por los símbolos de entrada ($e_i \in \Sigma$)

	e_1	e_2	...	e_n
q_1		$f(q_1, e_2)$		
...				
$*q_m$				

tas Finitos Deterministas. Representación

pueden representar mediante tablas de transición o

gramas de transición

Diagramas de transición:

- nodos etiquetados por los estados ($q_i \in Q$)
- arcos entre nodos q_i a q_j etiquetados con e_i si existe $f(q_i,e_i) = q_j$
- q0 se señala con ➔
- $q \in F$ se señala con ***** o doble círculo

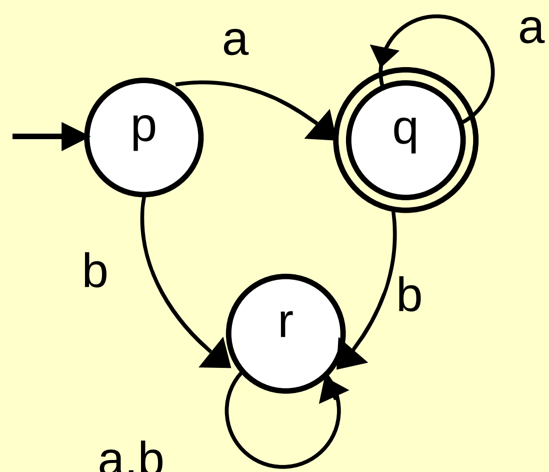
tas Finitos Deterministas. Representación

mplo: Sea el AFD_1 = ({a,b}, {p,q,r}, f, p, {q}) donde f á definida por:

,a) = q	f(p,b) = r
,a) = q	f(q,b) = r
,a) = r	f(r,b) = r

scribir su tabla de transición y dibujar su diagrama e transición

a	b
q	r
q	r
r	r



tas Finitos Deterministas. Conceptos Básicos

nfiguración: es un par ordenado de la forma (q,w) donde:

- q: estado actual del AF
- w: cadena que le queda por leer en ese instante, $w \in \Sigma^*$

Configuración inicial: (q_0, t)

- q_0: estado inicial
- t: cadena de entrada a reconocer por el AFD $\in \Sigma^*$

Configuración final: (q_i, λ)

- q_i: estado final
- λ: la cadena de entrada ha sido leída completamente

vimiento: es el tránsito entre dos configuraciones.

,aw) $\xrightarrow[F(q,a)=q']{}$ **(q',w)**

omo reconocedor de un Lenguaje:

uando un AF transita desde q_0 a un estado final en rios movimientos ➔ se ha producido en **ECONOCIMIENTO** o **ACEPTACIÓN** de la cadena entrada

uando un AF no es capaz de alcanzar un estado al, se dice que el AF **NO RECONOCE** la cadena entrada y que ésta **NO PERTENECE** al lenguaje conocido por el AF

nsión a palabra de la función de transición f:

mpliar su definición a palabras de Σ^*

$f: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

- a partir de f, que sólo considera palabras de

  longitud 1, hay que añadir:

  $f(q,\lambda) = q \quad \forall\, q \in Q$

  $f(q, ax) = f(f(q,a),x) \ \forall\, q \in Q,\ a \in \Sigma \ \text{ y } \ x \in \Sigma^*$

AFD$_1$, indicar el resultado de las siguientes

esiones:

)

a^n)

bb)

aabbaba)

baa)

tas Finitos Deterministas. Conceptos Básicos

asociado a un AFD:

un AFD = (Σ, Q, f, q_0, F), se dice que una palabra **x** es **aceptada** o **nocida** por el AFD si **(q_0,x)** $\in$ **F**

ama lenguaje asociado a un AFD al conjunto de todas las oras aceptadas por éste:

$$\mathbf{L = \{ x / x \in \Sigma^* \text{ AND } f(q0,x) \in F \}}$$

F = {} $\Rightarrow$ L= ϕ

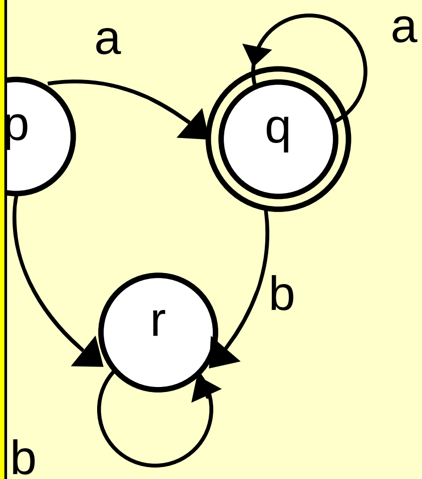
F = Q $\Rightarrow$ L= Σ *

Otra definición: $\mathbf{L = \{ x / x \in \Sigma^* \text{ AND } (q_0, x) \rightarrow (q,\lambda) \text{ AND } q \in F\}}$

tas Finitos Deterministas. Conceptos Básicos

FD$_{1,}$, comprobar que L(AFD$_1$) = $\{a^n \,/\, n>0\}$. Comprobar

se hace F = {r}, L(AFD$_1$) = $\{a^n b x \,/\, n \geq 0,\ x \in \Sigma^*\}$.

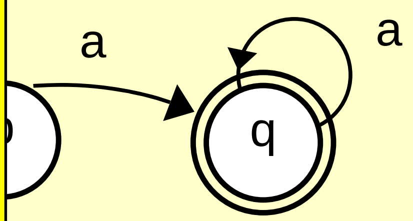


tas Finitos Deterministas. Ejercicios

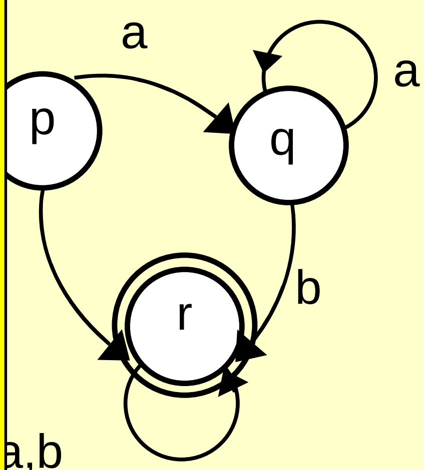
AFD$_{1,}$, comprobar que L(AFD$_1$) = {a^n / n>0}.

obar que si se hace F = {r},

D$_1$) = {a^{n}bx / n≥0, x ∈ Σ *}.



Desde p, con el número de a’s que sea, pero al menos una, llego al estado final

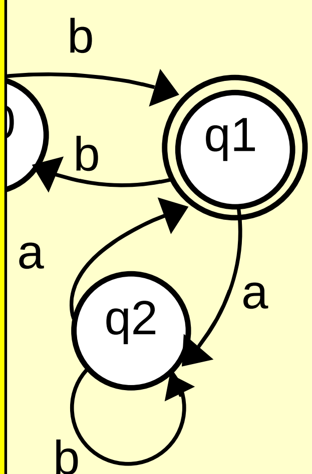


Desde p, con una a llego al estado q y desde allí se pueden aceptar tantas a’s como sean , luego con una b salto al estado final y allí puedo terminal o reconocer cualquier cadena de a´s y b´s. L= a*b (a*b*)*

tas Finitos Deterministas. Ejercicios

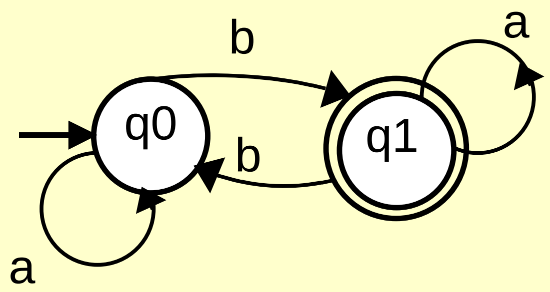
AFD$_{2,}$, comprobar que L(AFD$_2$) = {a*b ((b a*b)* (a

}. Es el L aceptado por el AFD$_2$:



tas Finitos Deterministas. Ejercicios

el AFD_3, indicar cual es $L(AFD_3)$



dos accesibles y Autómatas conexos:

ea un AFD = (Σ, Q, f, q_0, F)

el estado $p \in Q$ es **accesible** desde $q \in Q$ si $\exists\, x \in \Sigma^*$ ($f(q,x) = p$.

Todo estado es accesible desde sí mismo pues $f(p,\lambda) = p$

- Sea un AFD, $|Q| = n$, $\forall$ p, q $\in$ Q p es accesible desde q sii $\exists\, x \in \Sigma^*$, $|x| < n$ / $f(p,x) = q$
- Sea un AFD, $|Q| = n$, entonces $L_{AFD} \neq \phi$ Sii el AFD acepta al menos una palabra $x \in \Sigma^*$, $|x| < n$

...tas Finitos Deterministas. Ejercicios

...el AFD conexo equivalente al dado: AF= ({a,b},

...s}, p, f, {q,r,s}), donde f viene dada por la tabla:

	a	b
	r	p
q	r	p
r	r	p
s	s	s

...ar, además el leguaje reconocido por ambos AFD's

tas Finitos Deterministas. Ejercicios

AFD1= ({a,b}, {q1,q2,q3,q4}, q1, {q3}), donde f viene or la tabla:

	a	b
	q_2	q_4
	q_2	q_3
	q_4	q_3
	q_4	q_4

Indicar el leguaje que reconoce

AFD2= ({0,1}, {q1,q2,q3,q4}, q1, {q2}), donde f viene or la tabla:

	0	1
	q_4	q_2
	q_3	q_4
	q_4	q_2
	q_4	q_4

Indicar el leguaje que reconoce

tas Finitos Deterministas. Ejercicios

FD3= ({a,b,c}, {q1,q2,q3,q4,q5}, q1, {q2,q4}), donde f viene dada por

	a	b	c
→ q_1	q_2	q_3	q_5
* q_2	q_5	q_5	q_5
q_3	q_5	q_5	q_4
* q_4	q_5	q_5	q_5
q_5	q_5	q_5	q_5

Indicar el leguaje que reconoce

FD4= ({1,2,3}, {q1,q2,q3}, q1, {q2}), donde f viene dada por la tabla:

	1	2	3
	q_1	q_1	q_2
2	q_3	q_3	q_3
	q_3	q_3	q_3

Indicar el leguaje que reconoce

...tas Finitos Deterministas. Equivalencia

...encia y Minimización de AFD's

... es una Máquina Secuencial de Moore, así que mismos

...s MS's:

...ivalencia de estados:

...**q**, $\forall$ p,q $\in$ Q, si $\forall$ x$\in \Sigma^* \Rightarrow$ f(p,x) $\in$ F $\Leftrightarrow$ f(q,x) $\in$ F

...ivalencia de orden "n"

...**q**, $\forall$ p,q $\in$ Q, si $\forall$ x$\in \Sigma^*$ / $|x| \leq n \Rightarrow$ f(p,x) $\in$ F $\Leftrightarrow$ f(q,x) $\in$ F

...**q** $\Rightarrow$ **pE_nq,** $\forall$ n, p, q$\in$ Q

...**q** $\Rightarrow$ **pE_kq,** $\forall$ n > k

...**$_{+1}q$** $\Leftrightarrow$ **pE_nq AND $f(p,a)\ E_n f(q,a)$** $\forall$ a $\in \Sigma$

...**$Q/E_n = Q/E_{n+1} \Rightarrow Q/E_n = Q/E_{n+i}$** $\forall$ i = 0, 1, ...

...**$Q/E_n = Q/E_{n+1} \Rightarrow Q/E_n = Q/E$ conjunto cociente**

...**$Q/E_0| = 1 \Rightarrow Q/E_0 = Q/E_1$**

...**$|Q| > 1 \Rightarrow Q/E_{n-2} = Q/E_{n-1}$**

alencia y Minimización de AFD's

ema: **pEq ⇔ $\mathbf{pE_{n-2}\,q}$** $|Q| = n > 1$

pEq Sii $\forall\, x \in \Sigma^*,\ |x| \leq n-2$

$f(p,x) \in F \Leftrightarrow f(q,x) \in F$

es el valor más pequeño que cumple este teorema

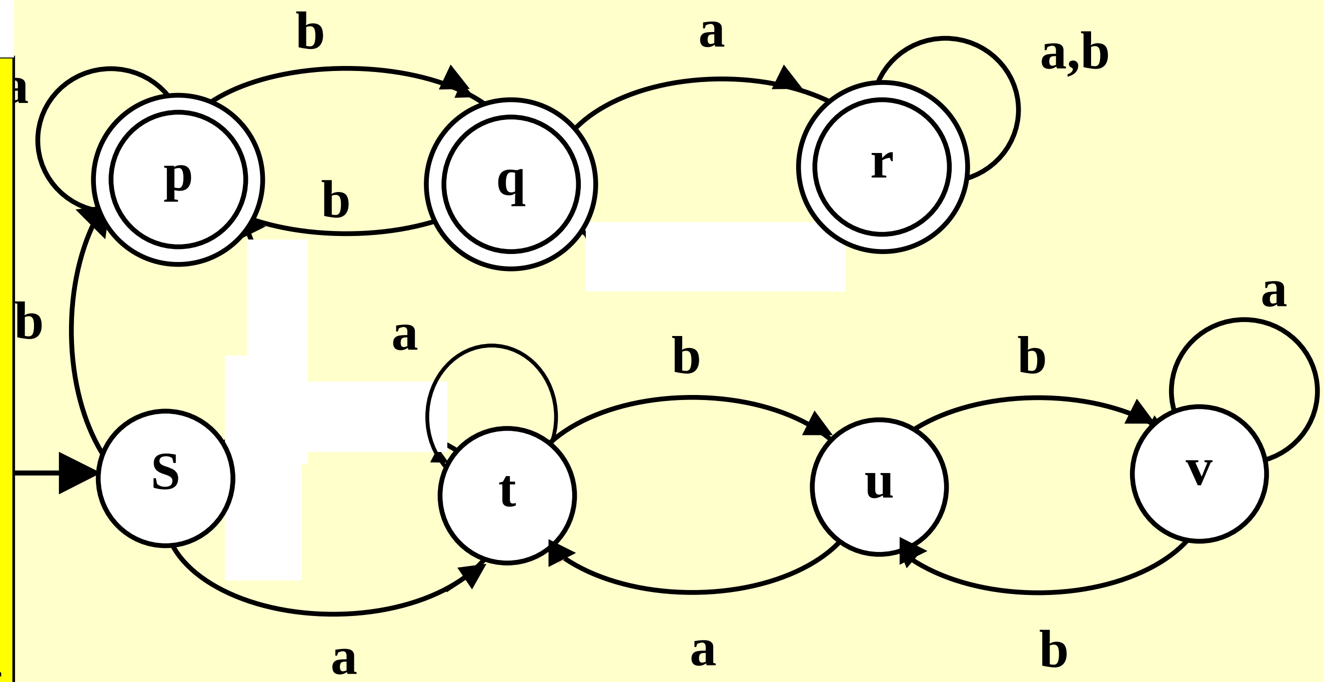
tas Finitos Deterministas. Equivalencia

tmo para hallar Q/E en AFD's

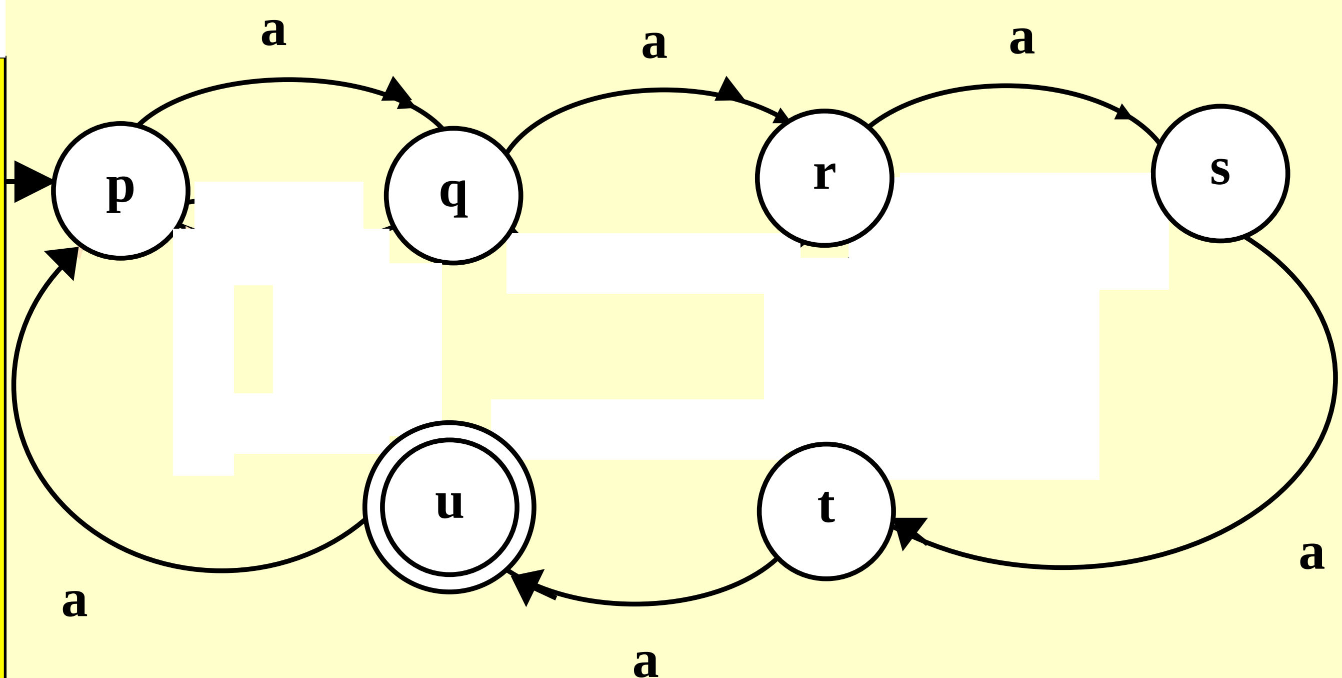
- **/E0 = { F, no F}** 1ª división en función de si son o no estados nales.
- **/E_{i+1}** : partiendo de **Q/E_i** = {C1,C2,...Cn}, se construye **Q/E_{i+1}**:
- y q están en la misma clase si:
- , q $\in$ Ck $\in$ Q/Ei $\forall$ a $\in$ Σ $\Rightarrow$ f(p,a) y f(q,a) $\in$ Cm $\in$ Q/Ei
- i **Q/E_i = Q/E_{i+1}** entonces **Q/E_i = Q/E**
- i no, repetir el paso 2 partiendo de Q/E_{i+1}

tas Finitos Deterministas. Equivalencia

cio 1 Hallar el AFD mínimo equivalente



2 Hallar el AFD mínimo equivalente



…tas Finitos Deterministas. Equivalencia

…atas equivalentes

…tados equivalentes en AFD's distintos:

…an 2 AFD's: (Σ,Q,f,q_0,F) y $(\Sigma',Q',f''q_0',F')$

… estados p,q / $p\in Q$ y $q\in Q'$ son equivalentes (pEq)

… $f(p,x) \in F \Leftrightarrow f(q,x) \in F' \ \forall\, x \in \Sigma^*$

…tados equivalentes en AFD's distintos:

…s AFD's son equivalentes si reconocen el mismo lenguaje, es …cir: Si $f(q_0,x) \in F \Leftrightarrow f(q_0',x) \in F' \ \forall\, x \in \Sigma^* \Rightarrow$ **2 AFD's son …uivalentes si lo son sus estados iniciales:**

q_0 E q_0'

tas Finitos Deterministas. Equivalencia

matas equivalentes, comprobación

uma directa de AFD's

eorema

goritmo para comprobar la equivalencia de

FDs

tas Finitos Deterministas. Equivalencia

natas equivalentes, comprobación

uma directa de AFD's:

ean 2 AFD's:

$A1 = (\Sigma, Q_1, f_1, q_{01}, F_1)$

$A2 = (\Sigma', Q_2, f_2, q_{02}, F_2)$

$Q_1 \cap Q_2 = \phi$

e llama suma directa de A1 y A2 al AF A:

$= A1 + A2 = (\Sigma, Q_1 \cup Q_2, f, q_0, F_1 \cup F_2)$

e:

- q_0 es el estado inicial de uno de los AF's
- f: $f(p,a) = f1(p,a)$ si $p \in Q1$

  $f(p,a) = f2(p,a)$ si $p \in Q2$

$\forall a \in \Sigma$

tas Finitos Deterministas. Equivalencia

natas equivalentes, comprobación

orema: sean A1, A2 / $Q_1 \cap Q_2 = \phi$, $|Q_1| = n_1$, $|Q_2| = n_2$

E A_2 si q01 E q02 en $A = A_1+A_2$ es decir, si A1 y A2

eptan las mismas palabras x / $|x| \leq n_1+n_2-2$

emás, n_1+n_2-2 es el valor mínimo que cumple el teorema

tas Finitos Deterministas. Equivalencia

natas equivalentes, comprobación

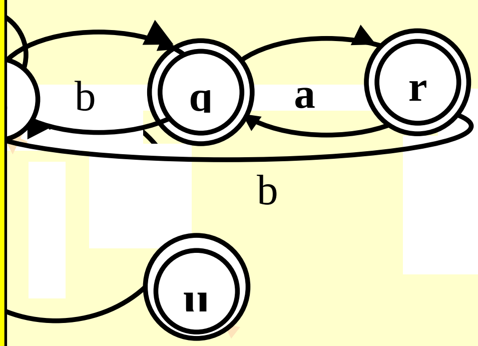
goritmo para comprobar la equivalencia de AFDs

Se hace la suma directa de los dos AFD's

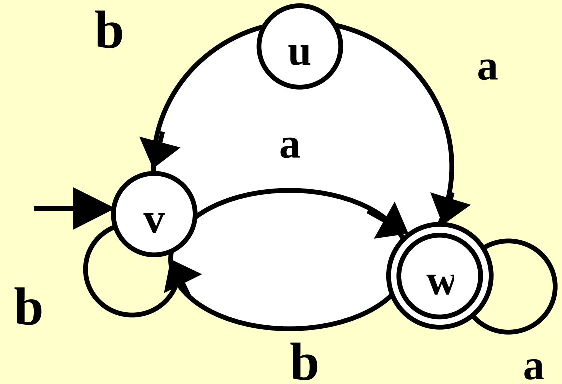
Se hace Q/E del AFD suma

Si los dos estados iniciales están en la misma clase de equivalencia de Q/E $\Rightarrow$ los 2 AFD's son equivalentes

tas Finitos Deterministas. Equivalencia



A1



A2

omorfismos

= (Σ,Q_1,f_1,q_{01},F_1) y A2 = (Σ',Q_2,f_2, q_{02},F_2) tales que $|Q_1| = |Q_2|$

ue **A1 y A2 son isomorfos**, si existe una aplicación biyectiva
$\rightarrow$ **Q_2** que cumple:

= $q_{02,}$ es decir, los estados iniciales son correspondientes
$_1 \Leftrightarrow$ i(q) $\in F_2$ es decir, los estados finales son
espondientes
,a)) = f_2(i(q),a) $\forall$ a $\in \Sigma$ q$\in Q_1$

va, a cada estado le corresponde otro equivalente que solo
cia en el nombre de sus estados.

isomorfos también son equivalentes y reconocen el mismo

inimización

), $A = (\Sigma, Q, f, q_0, F)$:

r del AFD conexo: eliminar estados inaccesibles desde el

o inicial

struir Q/E del autómata conexo

FD mínimo, salvo isomorfismos, es:

$(\Sigma, Q', f', q_0', F')$

Q/E

construye: $f'(C_i,a) = C_j$ si $\exists q \in C_i$, $p \in C_j$ / $f(q,a) = p$

C0 si q0 $\in C_0$, $C_0 \in$ Q/E

{C / C contiene al menos un estado de F($\exists$ un $q \in F$ tal que $q \in$

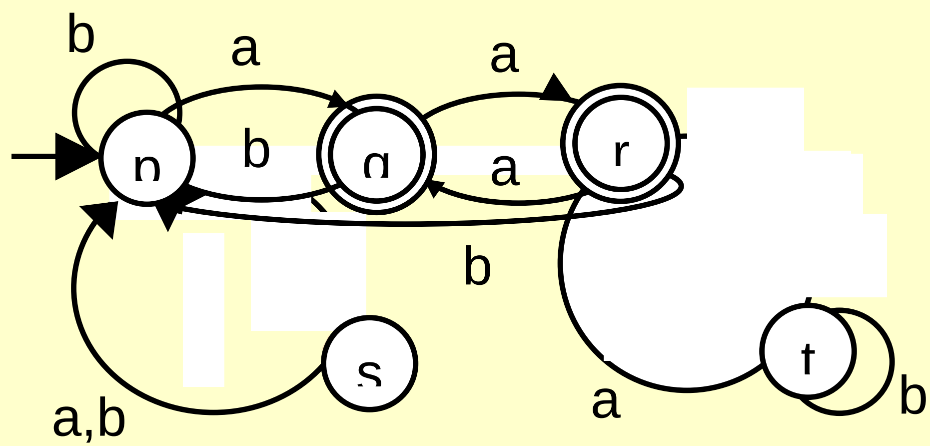
C)}

IO: 2 AFD's son equivalentes si sus AF mínimos

ivos son isomorfos.

inimización

4: Hallar el AFD mínimo equivalente al dado:



ociado a una G3 (I)

3 lineal izquierda: $G = (\Sigma_T, \Sigma_N, S, P)$

truye a partir de ella el AF: $A= (\Sigma_T, \Sigma_N \cup \{p,q\}, f, p, \{S\})$

e: p, q $\notin$ ni a Σ_T, Σ_N

lefine:

$f(U,t) = V$ si $V ::= U\,t \in P$

$f(p,t) = V$ si $V ::= t \in P$

$f(U,t) = q \quad \forall t \in \Sigma_T \,/\, V ::= U\,t \notin P$

$f(p,t) = q \quad \forall t \in \Sigma_T \,/\, V ::= t \notin P$

$f(q,t) = q \quad \forall t \in \Sigma_T$

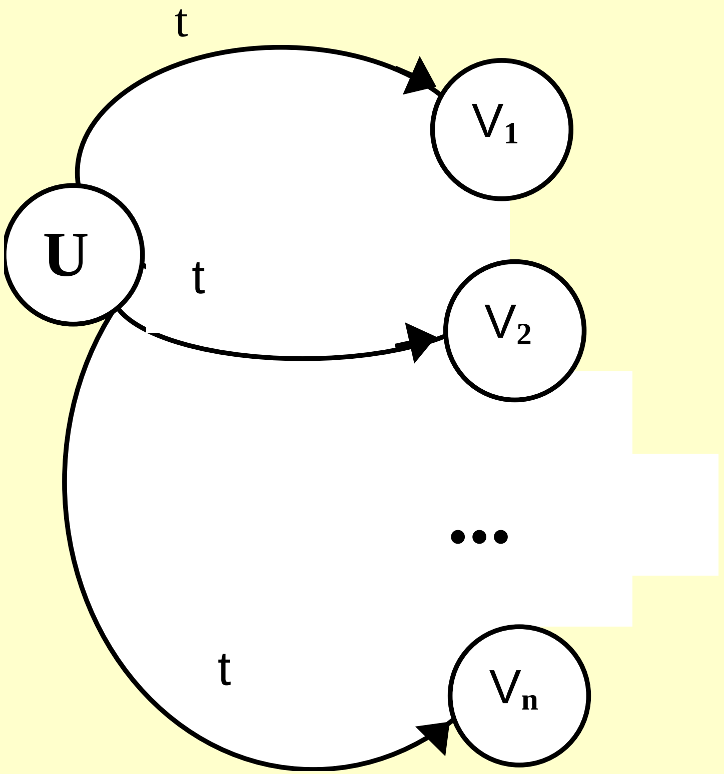
...ociado a una G3 (II)

...definición no asegura un AF determinista, ya que ...e ocurrir:

...:= U t

...:= U t

...:= Ut



ociado a una G3 (III)

cio 5

la G3 lineal izquierda:

{0,1}, {S,U,V}, S, P)

donde P = {S ::= U0 / V1

U ::= S1 / 1

V ::= S0 /0}

r el AFD mínimo que reconozca el lenguaje generado por
G.

ello: 1) Hallar el AF (Determinista en este caso)

2) Minimizarlo.

3) Hallar L(G) y L (AF) y ver si coinciden

4) repetir el ejercicio eliminando el axioma inducido

Deterministas, AFND's

nes (son equivalentes):

D = (Σ, Q, f, q_0, F), donde

Q x $\Sigma^* \rightarrow$ Q es No determinista, es decir, por ejemplo:

,a) = {q,r} y $f(p,\lambda)$ = {q,r}

D = $(\Sigma, Q, f, q_0, F, T)$, donde:

, q_0,F : idem que en AFD

Q x $\Sigma \rightarrow$ *P*(Q): conjunto de las partes de Q

Relación definida sobre pares de elementos de Q:

pTq = (p,q) $\in$T si está definida la transición $f(p, \lambda)=q$

Determinaistas, AFND's

Sea el AFND siguiente:

)}, {p,q,r,s}, f,p, {p,s}, T= {(q,s), (r,r), (r,s), (s,r)}) donde f:

) = {q} f(p,b) = {}

) = {p,r,s} f(q,b) = {p,r}

= {} f(r,b) = {p,s}

) = {} f(s,b) = {}

a de transiciones es:

	a	b	λ
→*p	q		
q	p,r,s	p,r	s
r		p,s	r,s
*s			r

sión a palabra de f en AFND's

ne a partir de f una función de transición f'' que actúa sobre
ıs de Σ^*

aplicación: f'': Q x $\Sigma^* \rightarrow$ P(Q)

iderando:

q,λ) = {p / qT*p $\forall$q $\in$Q}

a x = a1a2a3...an n>0

(q,x) = {p / p es accesible desde q por medio de la palabra
$\underbrace{\text{a1 } \lambda^*\text{a2 } \lambda^*\text{a3 } \lambda^*\text{... } \lambda^*\text{an } \lambda^*}_{\text{es idéntica a x}}$, $\forall$q$\in$Q}

lo de T*

cular f’ es necesario extender las transiciones con una λ a λ*.

existe el método formal de las matrices booleanas, o el método
riz de pares (estado, estado). Emplearemos esta última:

construye una matriz con tantas filas como estados.

a 1ª columna se coloca el par correspondiente al estado en
stión, es decir, pej (p,p) puesto que cada estado es accesible
de si mismo.

as columnas siguientes se añaden las transiciones λ definidas
l AFND, considerando si el hecho de añadirlas permite extender
na transición más. Pej. Si existe la transición (q,r) y se añade la
sición (r,s), habrá que añadir asimismo, la transición (q,s).

ndo no sea posible añadir ningún par más, se habrá terminado

de T*. Ejemplo (I)

l AFND: A, definido anteriormente, donde T= (r,r), (r,s), (s,r)} se trata de calcular T*

$$T^* = \left(\begin{array}{l} (p,p) \\ (q,q)(q,r)(q,s) \\ (r,r)(r,s) \\ (s,s)(s,r) \end{array} \right)$$

Producen (s,s), que ya estaba

Producen (q,r)

de T*. Ejemplo (II)

extiende la tabla de transición anterior para contener
nsertando una nueva columna correspondiente a λ^*

	a	b	λ	λ^*
→*p	q			p
q	p,r,s	p,r	s	q,s,r
r		p,s	r,s	r,s
*s			r	r,s

de T*. Ejemplo (III)

a se calcula la tabla de transición correspondiente a
biando las transiciones con a por λ*aλ* y las de b por

	λ*aλ*	**λ*bλ***
→*p	q,r,s	Φ
q	p,r,s	p,r,s
r	Φ	p,r,s
*s	Φ	p,r,s

uaje aceptado por un AFND

palabra **x** $\in\Sigma^*$ **es aceptada por un AFND** si:

' (q0,x) y F tienen al menos un elemento común, es decir, que (q0,x) contiene al menos un estado final.

El conjunto de todas las palabras aceptadas por un AFND es el enguaje aceptado por ese AFND.

$\mathbf{L_{AFND} = \{x \,/\, x \in\Sigma^* \text{ y } \exists \text{ qo} \rightarrow F\} = \{x \,/\, x \in\Sigma^* \text{ y } f'(qo,x) \cap F \neq \Phi\}}$

Al ser un AFND puede haber más de un camino, x es aceptada sólo con que uno de los caminos lleve a un estado final.

$\lambda \in$ **L_{AFND}** si :

1 qo $\in$ F

2 $\exists$ un estado final, q $\in$ F, tal que está en relación T* con qo:

qo T* q

uivalente a un AFND

AFND siempre es posible encontrar un AFD que reconozca el mismo
:

onjunto de los L_{AFND} = al conjunto de los L_{AFD}.

AFND no es más potente que un AFD, sino que un AFD es un caso
icular de AFND.

AFND a AFD:

el AFND A = (Σ, Q,f,qo,F,T). Se define a partir de él B, que es un
:

B = (Σ, Q’,f’,q’o,F’), tal que:

Q’= P(Q) conjunto de las partes de Q que incluye a Q y a Φ.

q0’ = f’(qo,λ) (todos los estados que tengan relación T* con q0).

F’ = {C / C $\in$ Q’ y $\exists$ q $\in$ C / q $\in$ F}

f’(C,a) = {C’ /C’ = $\bigcup_{q \in C} f'(q,a)$ }

uivalente a un AFND. Casos

AFND sin transiciones λ

o el AFND descrito por la tabla siguiente, hallar el AFD alente.

	a	b
→p	q	
q	r,q	
*r		r

Comprobar que el AFD acepta el mismo lenguaje.

uivalente a un AFND. Casos

AFND con transiciones λ

FND descrito por la tabla siguiente, hallar el AFD equivalente.

	a	**b**	**c**	**λ**
	p	q		q
	q	p,r		r
			s	p
	s			

...sociado a una G3

...a visto el procedimiento para obtener el AF que ...aba el lenguaje descrito por una G3 LI, sin ...rgo, ese procedimiento no siempre conduce a un ...lo habitual es:

...G3 → AFND → AFD

...cio 1: Sea la G LI: G= ({0,1}, {S,U}, S,{S ::= U0, U ...0 /S1 /0})

...r el AFD correspondiente.

...cio 2: Sea la G LI: G= ({0,1}, {S,U}, S,{S ::= U0 / λ, ...U0 /S1 /0})

...r el AFD correspondiente.

iado a una G3 (cuando es LD)

→ **G3:**

AF, A = (Σ, Q, qo, f, F), existe una G3 LD tal que

D) = L(A)

nstruye:

= Σ

= Q

= qo

{f(q,e) =q' → **si q' no es estado final** → q::= eq'

∈ F y f(q,e) = q' → q::= e (+ q::= eq')}

∈ F → q0 ::= λ

f(q, λ) = q' → q ::= q'}

ociado a una G3 (cuando es LD)

→ G3: Ejemplo

AF descrito por la siguiente tabla, hallar la G3 LD que
a el lenguaje por ella descrito. Comprobar que los
jes son iguales

	0	1
→A	A	C
B	A	C
C	C	B

ciado a una G3 (cuando es LD)

$\rightarrow$ AF:

a G3 LD, $G = (\Sigma_T, \Sigma_N\ S, P)$, existe un AF, A, tal que L(G3LD)
)

onstruye:

$= \Sigma_T$

$= \Sigma_N \cup \{F\}$ $F \notin \Sigma_N$

$o = S$

$= \{F\}$

$A ::= aB \rightarrow f(A,a) = B$

$A ::= a \rightarrow f(A,a) = F$

$S ::= \lambda \rightarrow f(S, \lambda) = F$

ciado a una G3 (cuando es LD)

3 → AF : Ejemplo

la G3 LD hallar el AF correspondiente.

({d,c}, {A,S,T}, A, {A ::= cS, S::= d/cS/dT, T::= dT/d})