

Tema 5

Interpolación

5.1 Introducción a la interpolación de funciones.

5.1.1 Polinomio interpolador.

Se llama interpolación al proceso matemático consistente en aproximar una función de la que sólo se conoce su valor (y quizá alguna de sus derivadas) en un conjunto finito de puntos.

Este proceso consiste en encontrar una función de una familia dada (normalmente un polinomio) que coincida con la función a aproximar en todos los datos conocidos. La idea fundamental del problema viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 5.1 Sean $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ números distintos y $m_i \geq 0$ un entero no negativo asociado a x_i para $i \in \{0, \dots, n\}$. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ m veces derivable en $[a, b]$ donde $m = \max\{m_0, \dots, m_n\}$.

Entonces existe un único polinomio P de grado $\leq n + \sum_{i=0}^n m_i$ que coincide con f y con sus derivadas de orden $\leq m_i$ en x_i para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

$$P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \quad 0 \leq i \leq n \quad 0 \leq k \leq m_i$$

Demostración:

Sea $g = n + \sum_{i=0}^n m_i$ y consideremos los espacios vectoriales \mathbb{R}^{g+1} y $\mathbb{R}_g[X]$, espacio de los polinomios de grado $\leq g$. Ambos tienen dimensión $g+1$.

$$\begin{aligned} \text{Sea la aplicación lineal } \Gamma: \mathbb{R}_g[X] &\rightarrow \mathbb{R}^{g+1} \\ P &\rightarrow (P(x_0), \dots, P^{(m_0)}(x_0), \dots, P(x_n), \dots, P^{(m_n)}(x_n)) \end{aligned}$$

Veamos que es inyectiva:

Sea $P \in \text{Ker}(\Gamma)$. Entonces:

$$\Gamma(P) = (0, \dots, 0) \Rightarrow P(x_i) = \dots = P^{(m_i)}(x_i) = 0 \Rightarrow (x - x_i)^{m_i+1} | P(x)$$

Así $(x - x_0)^{m_0+1} \dots (x - x_n)^{m_n+1} | P(x)$, donde el polinomio de la izquierda tiene grado $g+1$. Al

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Notación 5.2 Cuando sea necesario, para expresar lo anterior, diremos que las dos funciones coinciden en los puntos $x_0, \dots, x_0, x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n$, repitiendo cada punto m_i+1 veces.

Observación 5.3 Nótese que en el teorema 5.1 se han dado m_i+1 condiciones en cada punto, con lo que el número total de condiciones es $n+1+\sum_{i=0}^n m_i$, que es el número de coeficientes que tiene un polinomio del grado indicado. El resultado anterior justifica la siguiente definición.

Definición 5.4 Sean $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ números distintos y $m_i \geq 0$ un entero no negativo asociado a x_i para $i \in \{0, \dots, n\}$. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ m veces derivable en $[a, b]$ donde $m = \max\{m_0, \dots, m_n\}$. Se llama polinomio interpolador de f para los datos indicados al único polinomio P de grado $\leq n + \sum_{i=0}^n m_i$ que coincide con f y con todas sus derivadas de orden $\leq m_i$ en x_i para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Los valores m_0+1, \dots, m_n+1 reciben el nombre de orden de contacto de la función y el polinomio interpolador en los puntos x_0, \dots, x_n respectivamente.

$$P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \quad 0 \leq i \leq n \quad 0 \leq k \leq m_i$$

El coeficiente de grado máximo del polinomio interpolador recibe el nombre de diferencia dividida de f en los puntos $x_0, \dots, x_0, x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n$ y se denota por $f[x_0, \dots, x_0, x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n]$.

Observación 5.5 Llamando P al polinomio interpolador de f en los puntos x_0, \dots, x_n (puntos iguales o distintos) su n -ésima derivada es $P^{(n)}(x) = n!f[x_0, \dots, x_n]$.

Ejemplo 5.6 Hallar el polinomio interpolador para la función $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 8$, usando los puntos $x_0 = 1$ ($m_0 = 1$) y $x_1 = -1$ ($m_1 = 0$)

Se trata de hallar un polinomio P de segundo grado con las condiciones $P(1) = f(1) = 13$, $P'(1) = f'(1) = 10$ y $P(-1) = f(-1) = 5$.

Sea $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ el polinomio interpolador. Entonces:

$$\begin{aligned} 13 &= P(1) = a_2 + a_1 + a_0 \\ 10 &= P'(1) = 2a_2 + a_1 \\ 5 &= P(-1) = a_2 - a_1 + a_0 \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$P = \Gamma^{-1}(y_0, \dots, y_g) = \Gamma^{-1}(y_0 \mathbf{e}_0 + \dots + y_g \mathbf{e}_g) = y_0 \Gamma^{-1}(\mathbf{e}_0) + \dots + y_g \Gamma^{-1}(\mathbf{e}_g)$$

Una solución al problema de interpolación se obtiene calculando los polinomios $\Gamma^{-1}(\mathbf{e}_i)$, polinomios que sólo dependen de la distribución de puntos elegida y no de la función a interpolar.

Teorema 5.8 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$. Sean P_n el polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_n y P_{n-1} el polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_{n-1} . Entonces:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})$$

Demostración:

Sea $E_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$. Entonces: $E_n(x_0) = \dots = E_n(x_{n-1}) = 0$, ya que ambos polinomios coinciden con f en los puntos indicados.

Entonces: $E_n(x) = K_n(x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})$ (nótese que el resultado es válido también si hay puntos repetidos).

Calculando su coeficiente de grado n : $K_n = f[x_0, \dots, x_n] - 0$.

Resumiendo: $P_n(x) = P_{n-1}(x) + E_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})$

Corolario 5.9: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$. Sean P_n el polinomio interpolador y $z \in [a, b]$. Entonces: $f(z) = P_n(z) + f[x_0, \dots, x_n, z](z-x_0) \cdots (z-x_n)$

Demostración:

Sea P_{n+1} el polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_n, z .

Por el teorema 5.8 $P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_n, z](x-x_0) \cdots (x-x_n)$

Sustituyendo z en dicho polinomio se tiene:

$$f(z) = P_{n+1}(z) = P_n(z) + f[x_0, \dots, x_n, z](z-x_0) \cdots (z-x_n)$$

Comentario 5.10: En el corolario 5.9 hemos llamado z al punto de cálculo para mantener como x el nombre de la variable. La fórmula que emplearemos en lo sucesivo es $f(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_n, x](x-x_0) \cdots (x-x_n)$

5.1.2 Principales de tipos de interpolación.

Los casos más importantes de interpolación son:

- *Interpolación de Taylor:* $n=0$.

Se trata de encontrar un polinomio que coincida con una función en un solo punto

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

5.1.3 Preliminares analíticos.

Para el estudio de los errores de interpolación hemos de usar algunos resultados analíticos.

Teorema 5.11 (teorema de Rolle): Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) verificando $f(a)=f(b)$. Entonces $\exists \alpha \in (a,b)$ con $f'(\alpha)=0$.

Demostración: Por el teorema de Weierstrass $\exists x_0, y_0 \in [a,b]$ con $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0), \forall x \in [a,b]$ (una función continua en un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo absolutos).

Si x_0 e y_0 son los extremos del intervalo, al ser $f(a)=f(b)$ se concluye que f es constante en $[a,b]$ y por tanto su derivada es nula en todos los puntos.

En otro caso uno de ellos es un extremo relativo en el interior del intervalo. Llamando α a dicho punto, se concluye que $f'(\alpha)=0$.

Teorema 5.12 (teorema de Rolle generalizado): Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ con $f(x_0)=\dots=f(x_n)=0$ (si algún punto apareciese $k+1$ veces, quiere decir se anula la función y sus k primeras derivadas). Entonces $\exists \alpha \in (a,b)$ con $f^{(n)}(\alpha)=0$.

Demostración: Supondremos $x_0 \leq \dots \leq x_n$. Haremos la demostración por inducción. Supongamos $n=1$:

Si $x_0=x_1$, la consideración hecha dice que la condición es $f'(x_0)=0$, y x_0 es el punto indicado. En otro caso, por el teorema de Rolle $\exists \alpha \in (x_0, x_1)$ con $f'(\alpha)=0$.

Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$:

Ordenando los puntos si no lo estuvieran supondremos $x_0 \leq \dots \leq x_n$

Si $x_i < x_{i+1}$, por el teorema de Rolle, $\exists \alpha_i \in (x_i, x_{i+1})$ con $f'(\alpha_i)=0$.

Si $k+1$ elementos consecutivos de la sucesión coinciden $x_i = \dots = x_{i+k}$, se tiene que $f'(x_i) = \dots = f^{(k)}(x_i) = 0$. Haciendo $\alpha_i = x_i, \dots, \alpha_{i+k-1} = x_i$ podemos escribir $f'(\alpha_i) = \dots = f'(\alpha_{i+k-1}) = 0$.

Concluimos que $f'(\alpha_0) = \dots = f'(\alpha_{n-1}) = 0$.

Por la hipótesis de inducción $\exists \alpha \in (a,b)$ con $(f')^{(n-1)}(\alpha) = 0$.

Se concluye que $f^{(n)}(\alpha) = (f')^{(n-1)}(\alpha) = 0$.

De ahí el resultado.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Entonces: $E(x_0)=\dots=E(x_n)=0$.

Por el teorema 5.12: $\exists \alpha \in (a,b)$ con $E^{(n)}(\alpha)=0$.

Así pues: $0 = E^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha) - P^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha) - n! \cdot f[x_0, \dots, x_n] \Rightarrow f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$

5.2 Interpolación de Taylor y acotación del error.

5.2.1 Polinomio de Taylor

Según se explica en el apartado anterior el problema de interpolación de Taylor es el de hallar un polinomio que coincida con una función en un punto, tanto en su valor como en el de sus k primeras derivadas. Dicho con la notación 5.2 coincide en x_0, \dots, x_0 (n_0+1 veces). Para resolverlo vamos a aplicar la observación 5.7.

Lema 5.14 Dado un punto x_0 , un orden de contacto m_0+1 y usando la notación de la observación 5.7 se tiene que $\Gamma^{-1}(\mathbf{e}_k) = \frac{1}{k!}(x-x_0)^k$

Demostración:

Se trata de encontrar el polinomio $P(x)$ con $\Gamma(P)=\mathbf{e}_k$. En otras palabras:

$$P(x_0) = P'(x_0) = \dots = P^{(k-1)}(x_0) = 0; P^{(k)}(x_0) = 1; P^{(k+1)}(x_0) = \dots = P^{(m)}(x_0) = 0$$

Por cumplirse las primeras condiciones el polinomio ha de ser múltiplo de $(x-x_0)^k$. Como todas las derivadas de orden mayor de k de este polinomio son nulas, bastará con multiplicar por una constante y ajustarla para que $P^{(k)}(x_0)=1$.

$$P(x) = M(x-x_0)^k \Rightarrow 1 = P^{(k)}(x_0) = M \cdot k! \Rightarrow M = \frac{1}{k!}$$

De ahí el resultado.

Observación 5.15: En el lenguaje de diferencias divididas el resultado anterior indica que

$$f[x_0, \dots, x_0] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \text{ cuando el punto aparece } k+1 \text{ veces.}$$

Corolario 5.16 El polinomio que interpola a la función $f(x)$ en el punto x_0 con orden de

$$\text{contacto } m_0+1 \text{ es } f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x-x_0)^{m_0}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplos 5.18 Los polinomios de Taylor en $x_0=0$ de algunas funciones son

$$f(x)=e^x; \quad P(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

$$f(x)=\text{sen } x; \quad P(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x)=\text{cos } x; \quad P(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ejercicio 5.19 Comprobar que el polinomio de Taylor de $f'(x)$ de grado m_0 en el punto x_0 es la derivada del polinomio de Taylor de grado m_0+1 de $f(x)$ en el mismo punto.

Ejercicio 5.20 Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n en el punto $x_0=0$ de la función $f(x)=\sqrt{1+x}$

5.2.2 Error de interpolación

Teorema 5.21 (teorema de Taylor): Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ veces derivable y sean $x_0, x \in [a,b]$.

Entonces:

$$\exists \alpha \in (x_0, x) \text{ con } f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Demostración:

Consideremos $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de f en x_0 de grado n .

Por el corolario 5.16 se trata del polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_0 ($n+1$ veces).

Por el corolario 5.9 se tiene $f(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_0, x](x-x_0) \cdots (x-x_0)$

Por el corolario 5.13 $\exists \alpha \in (x_0, x)$ con $f[x_0, \dots, x_0, x] = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$

Resumiendo: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Corolario 5.22: Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ veces derivable y $x_0 \in [a,b]$. Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de f en x_0 y sea $M_{n+1} \geq 0$ verificando que $\forall x \in [a,b]: |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ Entonces:

$$\forall x \in [a,b]: |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Comentario 5.23: La idea de la interpolación es calcular un número que aproxime el valor de una función en un punto aproximándolo por el valor del polinomio interpolador. Llamando error de la interpolación a la diferencia entre el valor real y el valor aproximado, el corolario 5.22 nos da una expresión para el error de aproximación de Taylor.

Ejemplo 5.24: Calcular el valor de \sqrt{e} con un error menor que una centésima.

Se trata de calcular $f(0,5)$, donde $f(x)=e^x$.

Tomando como punto $x_0=0$ y teniendo en cuenta que $f^{(k)}(x)=e^x$, tenemos

$$\forall x \in [0, 0,5] : |f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^{0,5} = \sqrt{e} < 2 \cdot \text{Tomamos, pues } M_{n+1}=2.$$

Una cota del error es:

$$E_n = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = \frac{2}{(n+1)!} 0,5^{n+1}$$

Calculando esta cota de error para diversos valores de n, tenemos:

$$E_1=0,25; \quad E_2=0,04; \quad E_3=0,005$$

$$\text{Para } n=3: P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\text{Entonces } P_3(0,5) = 1 + \frac{0,5}{1} + \frac{0,5^2}{2!} + \frac{0,5^3}{3!} = 1,645833333$$

El valor exacto es $\sqrt{e} = 1,64872127$

5.3 Interpolación clásica de Lagrange: método de los coeficientes indeterminados.

El problema clásico de interpolación, estudiado por Lagrange es el de buscar un polinomio de grado n que coincida con una función dada en n+1 puntos conocidos.

Se trata del problema resuelto por el teorema 5.1, con $m_0=\dots=m_n=0$.

Ejemplo 5.25 Hallar el polinomio interpolador de una función que verifica $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=7$,

Como se tienen los valores en tres puntos se trata de hallar un polinomio de segundo grado $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, que coincida con $f(x)$ en dichos puntos.

$$\text{Entonces: } 1=f(1)=P_2(1) = a_0 + a_1 + a_2$$

$$3=f(2)=P_2(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

$$7=f(3)=P_2(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

5.3 Método de Lagrange para la interpolación polinómica.

El método de Lagrange consiste en aplicar la observación 5.7 al caso que estamos tratando.

Proposición 5.26 (fórmula de interpolación de Lagrange): Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$. Entonces el polinomio interpolador de la función f en los puntos x_0, \dots, x_n es

$$P(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + \dots + f(x_n) \cdot L_n(x), \text{ donde } L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Demostración: Según la observación 5.7 y utilizando su notación bastará con comprobar que $\Gamma^{-1}(\mathbf{e}_i) = L_i(x)$.

Se trata de encontrar el polinomio $L_i(x)$ de grado n verificando:

$$L_i(x_0) = \dots = L_i(x_{i-1}) = L_i(x_{i+1}) = \dots = L_i(x_n) = 0; L_i(x_i) = 1.$$

Por las condiciones de nulidad el polinomio $L_i(x)$ es divisible por cada uno de los factores $(x-x_j)$ con $j \neq i$ y por tanto por $(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$. Como ambos polinomios tienen grado n : $L_i(x) = K_i \cdot (x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$

Además:

$$1 = L_i(x_i) = K_i \cdot (x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n) \Rightarrow K_i = \frac{1}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$\text{Así pues: } L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Definición 5.27: Dados $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ se llaman polinomios de Lagrange para esos puntos a los

$$\text{polinomios } L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \text{ con } i=0, \dots, n.$$

Ejemplo 5.28 Repetir el ejemplo 5.25 utilizando los polinomios de Lagrange.

Se trata de buscar los polinomios $L_0(x)$, $L_1(x)$ y $L_2(x)$ para los puntos $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$.

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -x^2 + 4x - 3$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

El polinomio interpolador es

$$P(x) = f(1) \cdot L_0(x) + f(2) \cdot L_1(x) + f(3) \cdot L_2(x) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \right) + 3 \cdot (-x^2 + 4x - 3) + 7 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right) =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

5.4 Método de Newton.

El método de interpolación Newton consiste en utilizar las diferencias divididas en el cálculo del polinomio interpolador. En todos los casos supondremos que la función a interpolar es derivable tantas veces como requiera el problema, es decir, una unidad menos que el mayor orden de contacto que se tenga.

5.4.1 Interpolación de Newton en diferencias divididas

Proposición 5.29 Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$. Entonces el polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_n es $P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})$

Demostración: Por inducción sobre n .

Si $n=0$, $\text{gr}(P_0)=0$, luego P_0 es su coeficiente de grado 0, es decir $P_0(x) = f[x_0]$

Supongamos que es cierto para $n-1$. Entonces:

$$P_{n-1}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_{n-1}](x-x_0) \cdots (x-x_{n-2})$$

Por el teorema 5.8: $P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})$

Resumiendo:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_{n-1}](x-x_0) \cdots (x-x_{n-2}) + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})$$

Comentario 5.30: El resultado obtenido en la proposición 5.29 nos permite calcular de forma progresiva los polinomios interpoladores de una función en una colección de puntos, siempre y cuando se disponga de un procedimiento para calcular las diferencias divididas de una función.

Proposición 5.31: Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$. Se tienen los siguientes resultados:

a) Si $x_0 = \dots = x_n$: $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, en particular $f[x_0] = f(x_0)$.

b) Si $x_0 \neq x_n$: $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

Demostración:

a) Es la observación 5.15

b) Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_n . $P_{n-1}(x)$ el polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_{n-1} y $Q_{n-1}(x)$ el polinomio interpolador de f en x_1, \dots, x_n .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Desarrollando y pasando términos de miembro se obtiene:

$$(x_n - x_0)P_n(x) = (x - x_n)P_{n-1}(x) - (x - x_0)Q_{n-1}(x)$$

Sus coeficientes de grado n son $(x_n - x_0)f[x_0, \dots, x_n] = f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]$

Despejando se obtiene el resultado.

Ejemplo 5.32 Vamos a repetir el ejemplo 5.6 usando diferencias divididas.

$$P(1) = f(1) = 13, P'(1) = f'(1) = 10 \text{ y } P(-1) = f(-1) = 5.$$

En términos de diferencias divididas los datos son $f[1] = 13$, $f[1, 1] = 10$ y $f[-1] = 5$.

El polinomio interpolador es $P_2(x) = f[1] + f[1, 1](x-1) + f[1, 1, -1](x-1)(x-1)$.

Nos falta calcular la última diferencia dividida. Para ello calculamos antes $f[1, -1]$:

$$f[1, -1] = \frac{f[-1] - f[1]}{-1 - 1} = \frac{5 - 13}{-1 - 1} = 4$$

$$f[1, 1, -1] = \frac{f[1, -1] - f[1, 1]}{-1 - 1} = \frac{-2 - 4}{-1 - 1} = 3$$

$$P_2(x) = 13 + 10(x-1) + 3(x-1)(x-1) = 3x^2 + 4x - 6.$$

Comentario 5.33: Lo hecho en el ejemplo anterior se puede hacer siempre, poniendo los puntos en cualquier orden, sin más restricción que tener en cuenta que los puntos que sean múltiples han de ponerse consecutivamente. Para hacerlo de forma sistemática ponemos en una columna las primeras diferencias divididas con un solo punto, en una segunda las diferencias con dos puntos, etc.

Ejemplo 5.34 Construir el polinomio interpolador para los siguientes datos de una función f : $f(0) = -5$, $f(1) = -3$, $f'(1) = 3$, $f(2) = 5$

Hacemos la tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	-5			
		$\frac{f[1] - f[0]}{1 - 0} = \frac{-3 - (-5)}{1} = 2$		
1	-3		$\frac{f[1, 1] - f[0, 1]}{1 - 0} = \frac{3 - 2}{1 - 0} = 1$	
		$F[1, 1] = f'(1) = 3$		$\frac{f[1, 1, 2] - f[0, 1, 1]}{2 - 0} = \frac{5 - 1}{2 - 0} = 2$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

5.4.2 Interpolación de Newton en diferencias ordinarias

Un caso particular en que las fórmulas de Newton se simplifican bastante es cuando los puntos se encuentran a igual distancia de unos de otros.

Definición 5.35 Una sucesión de puntos x_0, \dots, x_n se dice que está uniformemente distribuida si $\exists h \in \mathbb{R}^+$ con $x_{i+1} = x_i + h$, para $i=0, \dots, n-1$.

Observación 5.36 En una sucesión de puntos uniformemente distribuidos se tienen las siguientes igualdades:

- a) $x_{i+k} = x_i + k \cdot h$
- b) $x_i - x_j = (i-j)h$

Definición 5.37 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $h > 0$. Entonces:

- a) Se llama diferencia de amplitud h de f a la función $\Delta f: [a, b-h] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$.
- b) Se define de manera recurrente la n -ésima diferencia de f como $\Delta^{n+1} f = \Delta(\Delta^n f)$.

Observación 5.38 Aplicando diferencias de funciones a sucesiones igualmente distribuidas se tiene $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$.

Proposición 5.39 Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ igualmente distribuidos. Entonces

dados $i, k \leq n$ con $i+k \leq n$ se tiene $f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k! \cdot h^k}$

Demostración:

$$\text{Si } k=1: f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{\Delta f(x_i)}{h} = \frac{\Delta f(x_i)}{1! \cdot h^1}$$

Supongamos que es cierto para $k-1$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } f[x_i, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} = \frac{\frac{\Delta^{k-1} f(x_{i+1})}{(k-1)! \cdot h^{k-1}} - \frac{\Delta^{k-1} f(x_i)}{(k-1)! \cdot h^{k-1}}}{k \cdot h} \\ &= \frac{\Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i)}{(k-1)! \cdot h^{k-1} \cdot k \cdot h} = \frac{\Delta(\Delta^{k-1}) f(x_i)}{(k-1)! \cdot k \cdot h^{k-1} \cdot h} = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k! \cdot h^k} \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Teorema 5.40 (fórmula de interpolación de Newton en diferencias ordinarias): Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ uniformemente distribuidos. Entonces el polinomio interpolador de en dichos puntos es:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!} s + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} s(s-1) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!} s(s-1) \cdots (s-n+1), \text{ donde } s = \frac{x-x_0}{h}$$

Demostración:

Por la proposición 5.29 se tiene

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})$$

Aplicando la proposición 5.39:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1! \cdot h} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! \cdot h^2} (x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! \cdot h^n} (x-x_0) \cdots (x-x_{n-1}) =$$

$$f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!} \cdot \frac{x-x_0}{h} + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} \cdot \frac{x-x_0}{h} \cdot \frac{x-x_1}{h} + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! \cdot h^n} \cdot \frac{x-x_0}{h} \cdots \frac{x-x_{n-1}}{h}$$

Aplicando la proposición 5.40 se obtiene la fórmula indicada.

Comentario 5.41 La fórmula de Newton en diferencias ordinarias, aparte de ser más sencilla de recordar que la de Newton en diferencias divididas, requiere de menos operaciones y, además, utiliza unos cuantos polinomios fijos, por lo que es de uso más sencillo, ya que estos polinomios pueden estar más estudiados, o se pueden tener tabulados.

Notación 5.42: Se consideran los polinomios $s^{(k)} = s(s-1) \cdots (s-k+1)$ y $\binom{s}{k} = \frac{s^{(k)}}{k!}$; $\binom{s}{0} = 1$.

Observación 5.43: Usando la notación 5.42 la fórmula de interpolación de Newton queda

$$P(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!} s + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} s^{(2)} + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!} s^{(n)} = f(x_0) \binom{s}{0} + \Delta f(x_0) \binom{s}{1} + \dots + \Delta^n f(x_0) \binom{s}{n}$$

Ejemplo 5.43 Hallar el polinomio interpolador para los siguientes datos: $f(-1)=-1$, $f(1)=-1$, $f(3)=5$, $f(5)=59$

Como se trata de puntos uniformemente distribuidos, podemos usar la fórmula de Newton en diferencias ordinarias. Primero construimos la tabla de diferencias:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
-1	-7			
1	-1	$f(1)-f(-1)=-1-(-7)=6$		
			$\Delta f(1)-\Delta f(-1)=6-6=0$	

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Teorema 5.44 (fórmula de interpolación de Newton en diferencias descendentes): Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ uniformemente distribuidos. Entonces el polinomio interpolador de en dichos puntos es:

$$P_n(x) = f(x_n) + \frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!} t + \frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!} t(t+1) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!} t(t+1) \cdots (t+n-1), \text{ donde } t = \frac{x-x_n}{h}$$

Demostración : Considerando los puntos en orden inverso se tiene:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x-x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + f[x_n, \dots, x_0](x-x_n) \cdots (x-x_1) = \\ &= f(x_n) + \frac{\Delta f(x_{n-1})}{1! \cdot h} (x-x_n) + \frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2! \cdot h^2} (x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! \cdot h^n} (x-x_n) \cdots (x-x_1) = \\ &= f(x_n) + \frac{\Delta f(x_{n-1})}{1! \cdot h} \cdot \frac{x-x_n}{h} + \frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2! \cdot h^2} \cdot \frac{x-x_n}{h} \cdot \frac{x-x_{n-1}}{h} + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! \cdot h^n} \frac{x-x_n}{h} \cdots \frac{x-x_1}{h} = \\ &= f(x_n) + \frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!} t + \frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!} t(t+1) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!} t(t+1) \cdots (t+n-1) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.45 : Hallar el polinomio interpolador del ejemplo 5.43 usando diferencias descendentes.

Usando la misma tabla ya calculada el polinomio interpolador es

$$P_n(x) = 59 + \frac{54}{1!} t + \frac{48}{2!} t(t+1) + \frac{48}{3!} t(t+1)(t+2), \text{ donde } t = \frac{x-5}{2}$$

5.5 Acotación del error en la interpolación de Lagrange.

Proposición 5.46 Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$. Sea $P_n(x)$ polinomio interpolador

de f en x_0, \dots, x_n . Entonces $\forall x \in [a,b] \exists \alpha \in [a,b]$ con $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (x-x_0) \cdots (x-x_n)$

Demostración: Por el corolario 5.9 $f(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \cdots (x-x_n)$

Por el corolario 5.13 $\exists \alpha \in [a,b]$ con $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$

Se concluye que $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (x-x_0) \cdots (x-x_n)$

Corolario 5.47 (error de interpolación): Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$. polinomio interpolador de f en x_0, \dots, x_n . y sea $M_{n+1} \geq 0$ verificando que $\forall x \in [a,b]: |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$

M

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Observación 5.48: Nótese que en la demostración anterior no se ha empleado si los puntos son iguales o distintos, así que es válida para todos los casos. Ya la habíamos obtenido para la interpolación de Taylor (además con la misma demostración esencialmente) y nos servirá para la interpolación de Lagrange y para la interpolación de Hermite que veremos en el siguiente epígrafe.

5.6 Interpolación de Hermite.

Según vimos en 5.1.2 la interpolación de Hermite consiste elegir varios puntos y una función de la que conocemos tanto su valor como su derivada en dichos puntos.

Definición 5.48: Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ puntos distintos. Se llama polinomio interpolador de Hermite en dichos puntos al único polinomio de grado $\leq 2n+1$ $P(x)$ verificando $P(x_i)=f(x_i)$, $P'(x_i)=f'(x_i)$, para $i=0, \dots, n$

Observación 5.49: La existencia y unicidad del polinomio de Hermite viene dada por el teorema 5.1. Para su cálculo se puede utilizar el método de las diferencias divididas ya explicado en 5.4.1 teniendo en cuenta que $f[x_i, x_i]=f'(x_i)$

Ejemplo 5.50 Hallar el polinomio interpolador de Hermite en los puntos -1, 0, 1 de una función $f(x)$ que verifica $f(-1)=3$, $f'(-1)=-5$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f(1)=5$, $f'(1)=11$

Solución: Construimos la tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+5}]$
-1	3	$f'(-1)=-5$	$\frac{-2 - (-5)}{0 - (-1)} = 3$	$\frac{2 - 3}{0 - (-1)} = -1$	$\frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1$	$\frac{1 - 1}{0 - (-1)} = 0$
-1	3					
0	1	$\frac{1 - 3}{0 - (-1)} = -2$	$\frac{0 - (-2)}{0 - (-1)} = 2$	$\frac{4 - 2}{1 - (-1)} = 1$	$\frac{3 - 1}{1 - (-1)} = 1$	
0	1	$f'(0)=0$	$\frac{4 - 0}{1 - 0} = 4$	$7 - 4 = 3$		

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Comentario 5.51 En la proposición 5.26 utilizábamos los polinomios de Lagrange $L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$ para dar una expresión explícita de la solución del problema de interpolación de Lagrange. En la siguiente proposición construimos una fórmula equivalente por la interpolación de Hermite.

Proposición 5.52 Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y sean $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ puntos distintos. El polinomio interpolador de Hermite en dichos puntos es:

$$P(x) = f(x_0) \cdot H_0(x) + f'(x_0) \cdot \tilde{H}_0(x) + \dots + f(x_n) \cdot H_n(x) + f'(x_n) \cdot \tilde{H}_n(x), \text{ donde}$$

$$H_i(x) = (-2 \cdot L_i'(x_i)(x-x_i) + 1) \cdot L_i(x)^2 \text{ y } \tilde{H}_i(x) = (x-x_i) \cdot L_i(x)^2, \text{ siendo } L_i(x) \text{ los polinomios de Lagrange.}$$

Demostración:

En virtud de la observación 5.9 la solución es la indicada si más que obtener los elementos allí indicados como $\Gamma^{-1}(\mathbf{e}_i)$. En nuestro caso se trata de hallar cuáles son los polinomios

$H_i(x)$ y $\tilde{H}_i(x)$ de grado $\leq 2n+1$ que verifican:

$$H_i(x_i) = 1; H_i'(x_i) = 0;$$

$$H_i(x_j) = H_i'(x_j) = 0 \text{ si } j \neq i$$

$$\tilde{H}_i(x_i) = 1; \tilde{H}_i'(x_i) = 0;$$

$$\tilde{H}_i(x_j) = \tilde{H}_i'(x_j) = 0 \text{ si } j \neq i$$

Por ser $H_i(x_j) = H_i'(x_j) = 0$, se tiene que $(x-x_j)^2 | H_i(x) \forall j \neq i$, de donde $L_i(x)^2 | H_i(x) \Rightarrow H_i(x) = Q(x) \cdot L_i(x)^2$, para cierto polinomio $Q(x)$.

$$\text{Entonces } \text{gr}(Q) = \text{gr}(H_i) - 2 \cdot \text{gr}(L_i) \leq 2n+1 - 2n = 1.$$

Resumiendo $H_i(x) = (Ax+B) \cdot L_i(x)^2$, para ciertos $A, B \in \mathbb{R}$

Análogamente se tiene $\tilde{H}_i(x) = (Cx+D) \cdot L_i(x)^2$, para ciertos $C, D \in \mathbb{R}$

Sólo nos falta calcular los valores de A, B, C y D . (recordemos que $L_i(x_i) = 1$)

$$1 = H_i(x_i) = (Ax_i+B)L_i(x_i)^2 = Ax_i+B$$

$$0 = H_i'(x_i) = A \cdot L_i(x_i)^2 + (Ax_i+B) \cdot 2L_i(x_i)L_i'(x_i) = A + 2L_i'(x_i) \text{ (hemos hecho uso de la primera igualdad obtenida).}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$$1 = \tilde{H}_i'(x_i) = C \cdot L_i(x_i)^2 + (Cx_i + D) \cdot 2L_i(x_i)L_i'(x_i) = C \Rightarrow D = -Cx_i = -x_i$$

$$\text{Se concluye que } \tilde{H}_i(x) = (Cx + D) \cdot L_i(x)^2 = \tilde{H}_i(x) = (x - x_i) \cdot L_i(x)^2$$

Conjugando los polinomios obtenidos con la observación 5.9 se obtiene el resultado.

Ejercicio 5.54: Comprobar que $L_i'(x_i) = \frac{1}{x_i - x_0} + \dots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x_i - x_n}$

Ejemplo 5.55: Hallar el polinomio interpolador de Hermite para los siguientes datos $f(1)=5$, $f'(1)=2$, $f(2)=3$, $f'(2)=4$

Solución:

Hallamos los polinomios de Lagrange y sus derivadas.

$$L_0(x) = \frac{x-2}{1-2} = -x+2; \quad L_0'(1) = -1$$

$$L_1(x) = \frac{x-1}{2-1} = x-1 \quad L_1'(2) = 2$$

Los polinomios de Hermite son:

$$H_0(x) = (-2 \cdot L_0'(x_0)(x-x_0)+1) \cdot L_0(x)^2 = (-2 \cdot (-1)(x-1)+1) \cdot (-x+2)^2 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

$$\tilde{H}_0(x) = (x-x_0)L_0(x)^2 = (x-1)(-x+2)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

$$H_1(x) = (-2 \cdot L_1'(x_1)(x-x_1)+1) \cdot L_1(x)^2 = (-2 \cdot 1(x-2)+1)(x-1)^2 = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$$

$$\tilde{H}_1(x) = (x-x_1)L_1(x)^2 = (x-2)(x-1)^2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

El polinomio buscado es

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) \cdot H_0(x) + f'(x_0) \cdot \tilde{H}_0(x) + f(x_1) \cdot H_1(x) + f'(x_1) \cdot \tilde{H}_1(x) = \\ &= 5(2x^3 - 9x^2 + 12x - 4) + 2 \cdot (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) + 2 \cdot (-2x^3 + 9x^2 - 12x + 5) + 4 \cdot (x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = \\ &= 10x^3 - 44x^2 + 60x - 21 \end{aligned}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70