

# Tema 6

## MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

### 1. Introducción

Entre los capítulos de la electrodinámica que son importantes desde el punto de vista práctico figura la teoría del movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos. La teoría del movimiento de tales partículas en campos electromagnéticos es el fundamento de toda la electrónica, de la técnica de aceleradores, de la microscopía con electrones y protones, de la espectrografía de masas, de los estudios de las reacciones en un plasma y de las instalaciones experimentales para la investigación de las reacciones termonucleares. Es también muy importante en toda una serie de otros dominios de la física, a saber, la astrofísica, la física de los rayos cósmicos, etc.

En una primera aproximación nos limitaremos a considerar los problemas más simples. Supondremos que el campo en que se encuentra la partícula cargada tiene una intensidad muy grande comparada con el campo de la propia partícula. Es decir, la partícula cuyo movimiento nos interesa se considera como partícula de prueba que no deforma el campo externo dado.

### 2. Movimiento en un campo eléctrico estático y uniforme.

Comenzaremos por el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico homogéneo y constante en el tiempo. Las ecuaciones del movimiento son de la forma

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \mathbf{E} \quad (6.1)$$

Orientando el eje Z en el sentido del campo podemos descomponer la ecuación vectorial anterior en sus componentes

$$\begin{aligned} ma_x &= 0 \\ ma_y &= 0 \\ ma_z &= qE \end{aligned}$$

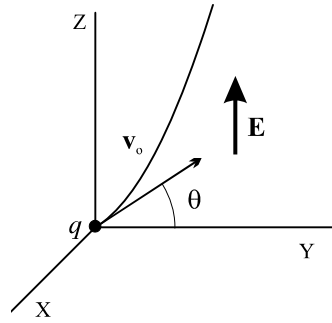


Figura 6.1

Si la partícula en el instante inicial tenía una velocidad  $\mathbf{v}_o = v_o \cos \theta \mathbf{u}_y + v_o \sin \theta \mathbf{u}_z$ , formando un ángulo  $\theta$  con el eje Y como muestra la figura 6.1, y se encontraba en el origen de coordenadas, la integración sucesiva de las ecuaciones del movimiento da

$$v_z = \frac{qE}{m}t + v_o \sin \theta$$

$$v_y = v_o \cos \theta$$

Y

$$z = \frac{qE}{m}t^2 + (v_o \sin \theta) t$$

$$y = (v_o \cos \theta) t$$

Eliminando el tiempo entre las expresiones escritas para  $z$  y  $y$ , se encuentra la ecuación de la trayectoria

$$z = \frac{qE}{m(v_o \cos \theta)^2} y^2 + (\tan \theta) y \quad (6.2)$$

Como era de esperar, la partícula se mueve según una parábola como se muestra en la Figura 6.1

### 3. Movimiento en un campo magnético estático y uniforme

Consideremos ahora el movimiento de una partícula en un campo magnético homogéneo y constante. Orientemos el eje Z en el sentido del campo. Las ecuaciones del movimiento tienen la forma

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.3)$$

o bien, en componentes

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{q}{m} B v_y \\ a_y &= -\frac{q}{m} B v_x \\ a_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como se deduce de las expresiones anteriores, el campo magnético dirigido a lo largo del eje  $Z$  no influye en el movimiento de la partícula en esta dirección. Buscaremos como soluciones de las ecuaciones [6.4] expresiones de la forma

$$v_x = A_x \cos(\omega_C t + \alpha)$$

$$v_y = A_y \sin(\omega_C t + \alpha)$$

Derivando la primera de estas expresiones y comparando con lo que resulta de sustituir en [6.4] las expresiones para las componentes de la velocidad tenemos, por un lado

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A_x \omega_C \sin(\omega_C t + \alpha)$$

y por otro

$$a_x = \frac{q}{m} B v_y = \frac{q}{m} B A_y \sin(\omega_C t + \alpha)$$

de donde, igualando ambas expresiones, tenemos

$$-A_x \omega_C = \frac{q}{m} B A_y \quad (\text{I})$$

Haciendo lo mismo para la componente  $y$  de la aceleración

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{dv_y}{dt} = A_y \omega_C \cos(\omega_C t + \alpha) \\ a_y &= -\frac{q}{m} B v_x = -\frac{q}{m} B A_x \cos(\omega_C t + \alpha) \end{aligned}$$

de donde

$$A_y \omega_C = -\frac{q}{m} B A_x \quad (\text{II})$$

Teniendo en cuenta I y II, se concluye que las soluciones buscadas serán soluciones

de [6.4] siempre que se verifique

$$\omega_C = \frac{qB}{m} \quad ; \quad A_x = -A_y = A \quad (6.5)$$

De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned} v_x &= A \cos(\omega_C t + \alpha) = A \cos\left(\frac{qB}{m}t + \alpha\right) \\ v_y &= -A \sin(\omega_C t + \alpha) = -A \sin\left(\frac{qB}{m}t + \alpha\right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Es evidente que

$$A^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_{o\perp}^2$$

donde  $v_{o\perp}$  es la velocidad inicial en el plano XY, luego [6.6] se puede escribir como

$$\begin{aligned} v_x &= v_{o\perp} \cos(\omega_C t + \alpha) \\ v_y &= -v_{o\perp} \sin(\omega_C t + \alpha) \end{aligned} \quad (6.6\text{bis})$$

Integrando de nuevo las expresiones obtenidas para las velocidades [6.6bis], se tiene

$$\begin{aligned} x &= x_o + \frac{v_{o\perp}}{\omega_C} \sin(\omega_C t + \alpha) \\ y &= y_o + \frac{v_{o\perp}}{\omega_C} \cos(\omega_C t + \alpha) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Eliminando el tiempo entre estas últimas ecuaciones, se encuentra que la partícula se mueve a lo largo de una circunferencia, como se muestra en la figura 6.1(a), de ecuación

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \frac{v_{o\perp}^2}{\omega_C^2} = R_C^2 \quad (6.8)$$

La frecuencia de rotación de la partícula, determinada por la expresión [6.5] se llama **frecuencia de ciclotrón**. Esta frecuencia es igual al doble de la frecuencia de Larmor, no depende de la velocidad inicial de la partícula y viene determinada por la razón  $q/m$ .

El radio de la circunferencia es

$$R_C = \frac{v_{o\perp}}{\omega_C} = \frac{mv_{o\perp}}{qB} \quad (6.9)$$

y tiene un significado simple: la fuerza de Lorentz es siempre perpendicular a la trayectoria de la partícula, actuando por tanto como una fuerza centrípeta, esto es, en módulo

$$F_c = \frac{mv_{o\perp}^2}{R_C} = qv_{o\perp}B$$

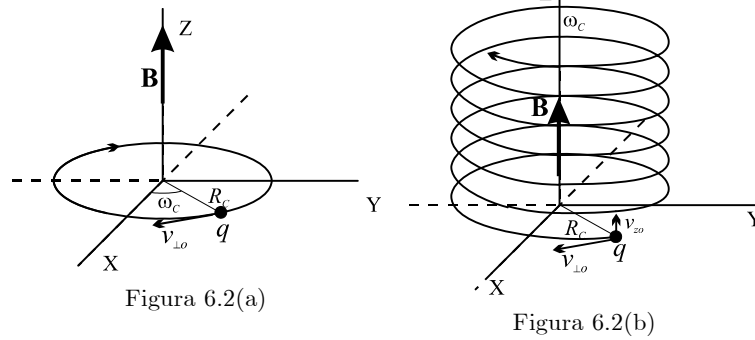


Figura 6.2(a)

Figura 6.2(b)

Si la partícula en el instante inicial, junto con la velocidad en el plano  $XY$ , presenta una componente de la velocidad  $v_{oz}$  en el sentido del eje  $Z$ , se moverá con movimiento uniforme a lo largo de la dirección del campo magnético. La superposición de ambos movimientos, uniforme a lo largo del eje  $Z$  y de rotación en el plano  $XY$ , conduce a una trayectoria de la partícula que tiene la forma de hélice, como se muestra en la figura 6.2(b). Las espiras de la trayectoria se encuentran sobre un cilindro de radio  $R_C$  cuyo eje es paralelo al eje  $Z$ .

Para el movimiento en un campo magnético constante  $\mathbf{B}$  se cumplen las siguientes leyes de conservación:

1. Se conserva la energía total de la partícula

$$W = \frac{1}{2}m [v_{o\perp}^2 + v_{oz}^2] = cte$$

2. Se conserva la proyección del momento angular sobre el eje  $Z$ , es decir

$$L_z = mR_C^2\omega_C = cte$$

3. Se conserva también el momento magnético creado por la partícula que se mueve a lo largo de la circunferencia:

$$\mu_z = \frac{q}{2m}L_z = \frac{qR_C^2\omega_C}{2} = \frac{1}{2}mv_{o\perp}^2 \frac{1}{B} = \frac{W_{\perp}}{B} = cte$$

donde  $W_{\perp} = \frac{1}{2}mv_{o\perp}^2$  es la energía cinética del movimiento en el plano  $XY$ .

Un campo magnético homogéneo y constante posee la propiedad de enfocar las partículas. Supongamos que de un cierto punto parte un haz de partículas en diferentes direcciones y con velocidades iniciales distintas que se encuentran en el plano  $XY$ . Dado que la frecuencia de ciclotrón no depende de la velocidad inicial, una vez transcurrido un intervalo de tiempo  $T_C = 2\pi/\omega_C$  las partículas, que han efectuado un giro completo, se reúnen de nuevo en un mismo punto.

Si ahora se considera un haz de partículas que tienen iguales valores de la velocidad

inicial  $|v_{o\perp}|$ , pero parten en direcciones diferentes, se puede observar lo siguiente: al cabo del tiempo  $T_C$  todas ellas habrán recorrido una espira de una hélice. El paso de ésta, igual a  $z_o = v_{oz}T_C = v_o \cos \alpha T_C$ , será diferente en cada caso. Aquí  $\alpha$  es el ángulo formado por las direcciones de la velocidad inicial y del eje Z. Por ello, las partículas que parten de un punto inicial no se reúnen de nuevo en un mismo punto. Sin embargo, si el ángulo  $\alpha$  es pequeño, de modo que  $\cos \alpha \approx 1$ , el paso de la hélice será el mismo para todas las partículas y el haz quedará enfocado.

#### 4. Movimiento en un campo eléctrico y magnético estáticos y uniformes

Consideremos finalmente el caso general del movimiento de una partícula en un campo eléctrico y otro magnético homogéneos y constantes en el tiempo. Escribamos la ecuación del movimiento para este caso general en la forma

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Introduzcamos una nueva incógnita  $\mathbf{V}$ , definida por la relación

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Sustituyendo en la ecuación del movimiento

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q \left( \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \times \mathbf{B} \right)$$

desarrollando el producto vectorial

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}B^2$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{q}{m} \left( \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{1}{B^2} (\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}B^2) \right) = \\ &= \frac{q}{m} \left( \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})}{B^2} \right) \end{aligned} \quad (6.11a)$$

Consideremos que la dirección del campo magnético es la del eje Z y que el campo eléctrico es perpendicular al magnético. Entonces  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$  y tendremos

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (6.11b)$$

Esta expresión coincide con la ecuación [6.3], en consecuencia,  $\mathbf{V}$  representa la velocidad del movimiento de una partícula a lo largo de una circunferencia en un plano perpendicular al campo magnético  $\mathbf{B}$ , movimiento que tiene lugar con la frecuencia de ciclotrón. Las componentes de la velocidad  $\mathbf{V}$  vienen dadas por fórmulas análogas a las dadas por [6.7] en las que haremos  $\alpha = 0$ .

En estas condiciones, la velocidad total de la partícula será igual a

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (6.12)$$

o bien, si consideramos que la dirección del campo eléctrico es en el eje Y, en componentes

$$v_x = V_x + \frac{E_y}{B} = v_{o\perp} \cos \omega_C t + \frac{E_y}{B}$$

$$v_y = V_y = -v_{o\perp} \sin \omega_C t \quad (6.13)$$

donde  $v_{o\perp}$  es el valor inicial de la velocidad en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético  $\mathbf{B}$ . A un valor de la constante  $\alpha$  igual a cero corresponde una velocidad inicial de la partícula dirigida a lo largo del eje X. De [6.12] se sigue que la componente de la velocidad de la partícula

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (6.14)$$

es perpendicular a ambos campos, su módulo es igual a

$$|\mathbf{v}_D| = \frac{E}{B} \quad (6.15)$$

y no depende ni de la carga ni de la masa de la partícula. El movimiento de una partícula en la dirección de  $\mathbf{v}_D$  recibe el nombre de **deriva** y está representado en la figura 6.3.

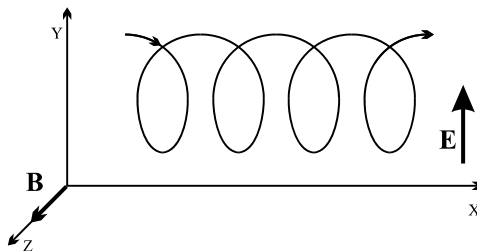


Figura 6.3

Se puede llegar a una interpretación intuitiva del fenómeno de la deriva mediante el siguiente razonamiento. Supongamos que una partícula cargada positivamente se mueve a lo largo de una circunferencia en el plano XY perpendicular a la dirección del campo magnético  $\mathbf{B}$ , cuya dirección orientada se toma como eje Z. Supongamos

además que el campo eléctrico está dirigido según el eje Y. Entonces el campo eléctrico acelerará la partícula en su movimiento sobre la circunferencia a la izquierda y la retardará cuando se mueve en la semicircunferencia a la derecha. La trayectoria circular se verá deformada. La partícula recorre la parte superior de la circunferencia con velocidad mayor que la parte inferior. El campo magnético comparará la trayectoria de la partícula en la parte inferior de modo más pronunciado que en la superior. Por lo tanto, la proyección sobre el eje X del camino recorrido por la partícula en la semicircunferencia inferior será menor que en la superior. El resultado de todo ello es que después de cada giro completo se produce un determinado corrimiento de la partícula a lo largo del eje X en sentido positivo.

Un razonamiento análogo aplicado a una partícula negativa conduce al mismo sentido de la deriva. Ver figura 6.4

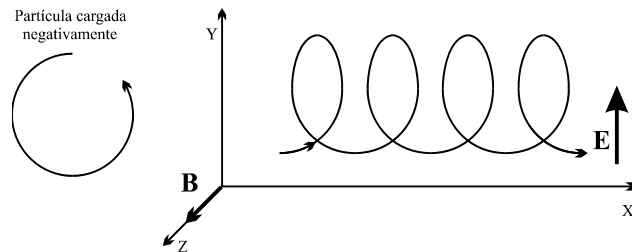


Figura 6.4

Integrando de nuevo las ecuaciones [6.13], se encuentran las expresiones de la trayectoria de la partícula en forma paramétrica:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{v_{o\perp}}{\omega_C} \sin \omega_C t + \frac{E_y}{B} t + x_o \\
 y &= \frac{v_{o\perp}}{\omega_C} \cos \omega_C t + y_o
 \end{aligned}
 \tag{6.16}$$

La curva descrita por la partícula se llama **trocoide**. Los valores particulares de los parámetros de la trocoide dependen de las condiciones iniciales. Si admitimos que en el instante  $t = 0$  la partícula cargada se encontraba en el origen de coordenadas, se tendrá  $x_o = 0$ ;  $y_o = -v_{o\perp}/\omega_C$ . En este caso, la forma de la curva viene determinada exclusivamente por el valor de la velocidad inicial  $v_{o\perp}$ . Si  $|v_{o\perp}| > E/B$  se obtiene la curva (a) de la figura 6.5; para  $|v_{o\perp}| < E/B$ , la curva (b). La curva (c) que es una cicloide, corresponde al caso en que  $v_{o\perp} = -E/B$ .

Si el campo eléctrico no es perpendicular al campo magnético, los dos miembros de la ecuación [6.11a] se pueden proyectar sobre un plano perpendicular a  $\mathbf{B}$  y sobre el eje Z. Obtenemos entonces

$$\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{V}_\perp \times \mathbf{B}) \quad ; \quad \frac{dV_z}{dt} = \frac{q}{m} E_\parallel
 \tag{6.17}$$



donde  $E_{\parallel} = E \cos \phi$  es la componente del campo eléctrico paralela al campo magnético. En la velocidad de deriva  $V_D$  hay que escribir ahora  $E_{\perp}$ . A la deriva de la partícula se superpone un movimiento uniformemente acelerado a lo largo del campo magnético bajo la acción de la fuerza  $qE_{\parallel}$ .

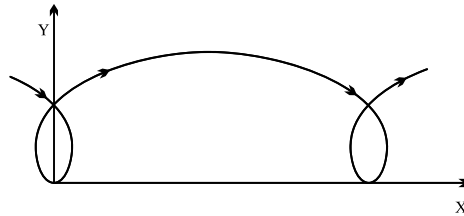


Figura 6.5 (a)

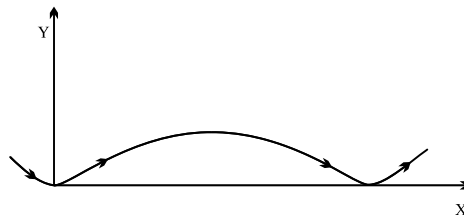


Figura 6.5 (b)

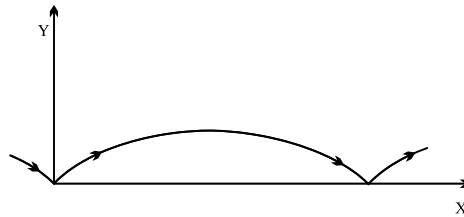


Figura 6.5 (c)

## 5. Movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos lentamente variables

Pasemos ahora al caso, muy importante, del movimiento de partículas en campos magnéticos que varían en el tiempo y en el espacio. En el caso general de campos variables, la integración de las ecuaciones del movimiento resulta ser un problema muy difícil. En consecuencia, nos limitaremos al caso concreto de campos que varían lentamente en el tiempo y de un punto a otro.

Consideremos el caso en que un campo magnético cambia lentamente con el tiempo, manteniéndose homogéneo en el espacio. Supongamos que una partícula gira con la frecuencia de ciclotrón  $\omega_C$  en un plano perpendicular al campo magnético. Admitiremos que la variación del campo después de una revolución es suficientemente pequeña, es decir, que

$$T_C \left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{B}| \quad (6.18)$$

donde  $T_C = 2\pi/\omega_C$

Al variar el campo con el tiempo, tenemos que tener en cuenta la ley de inducción de Faraday, esto es

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (6.19)$$

donde el contorno de integración coincide con la trayectoria de la partícula. Multiplicando la ecuación [6.19] por la carga de la partícula y considerando que en el curso de un ciclo la magnitud  $\partial \mathbf{B}/\partial t$  se conserva constante, podemos escribir

$$q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right| \cdot \mathbf{S} = -q \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| \pi R_C^2 \quad (6.20)$$

La integral que aparece en el primer miembro de [6.20] representa el trabajo realizado sobre la carga en un giro completo. Este trabajo es igual al aumento de energía cinética del movimiento en el plano XY, aumento que denotaremos por  $\Delta W_{\perp}$ . En consecuencia

$$\Delta W_{\perp} = -q\pi R_C^2 \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| \quad (6.21)$$

El signo menos significa que una partícula con carga negativa se mueve en sentido opuesto al sentido positivo del contorno de integración.

Determinemos la variación de la energía cinética del movimiento en el plano XY con el tiempo, es decir,  $dW_{\perp}/dt$ . Basándonos en [6.21] y [6.10], tenemos

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{\Delta W_{\perp}}{T_C} = \frac{|q|\pi R_C^2}{T_C} \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| = \frac{|q|\omega_C R_C^2}{2} \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| = \mu \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| \quad (6.22)$$

Según la definición de [6.10]

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \mu \frac{\partial B}{\partial t} + B \frac{\partial \mu}{\partial t} \quad (6.23)$$

Comparando las ecuaciones [6.22] y [6.23], se ve que, para una variación lenta del campo magnético, el momento magnético de la partícula se conserva

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad (6.24)$$

Vamos a continuación que se puede llegar a la misma conclusión cuando se estudia el movimiento de una partícula en un campo magnético estacionario que varía poco de un punto a otro.

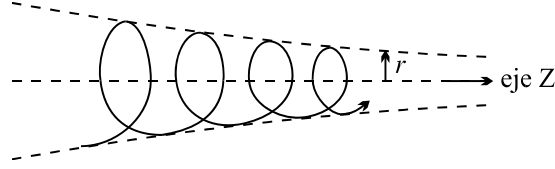


Figura 6.6

Supongamos que el campo magnético está dirigido a lo largo del eje Z y que su intensidad aumenta al crecer Z. Las líneas del campo convergen, conforme se representa en la figura 6.6. Admitiremos que la variación del campo magnético a lo largo de una distancia del orden de  $R_C$  es pequeña, es decir, que se tiene

$$R_C \left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right| \ll |\mathbf{B}| \quad (6.25)$$

Dado que el campo magnético varía a lo largo del eje Z, la componente radial del campo magnético  $B_r$  es también diferente de cero. De la ecuación de la divergencia de  $\mathbf{B}$  en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

se sigue que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Integrando y prescindiendo al hacerlo de la dependencia de  $\partial B_z / \partial z$  respecto de la coordenada  $r$  sobre una circunferencia de radio  $r \sim R_C$ , se encuentra

$$B_r \approx -\frac{1}{2} r \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Dado que cuando se cumple la condición [6.25] la componente  $B_r$  es pequeña comparada con la componente  $B_z$  para todos los valores de  $r < R_C$ , se puede suponer que  $|\mathbf{B}| \approx B_z$ , es decir, que el campo forma un ángulo pequeño con el eje Z y que

$$B_r \approx -\frac{1}{2} r \frac{\partial |\mathbf{B}|}{\partial z} \quad (6.26)$$

Si la componente radial del campo magnético es distinta de cero,  $B_r \neq 0$ , sobre la partícula que se mueve en el plano XY siguiendo una circunferencia con la frecuencia de ciclotrón actúa una fuerza en la dirección del eje Z. La partícula experimentará una deriva en esta dirección y la componente  $v_z$  satisfará la ecuación del movimiento

$$m \frac{dv_z}{dt} = q v_{\perp} B_r = -\frac{q}{2} v_{\perp} R_C \frac{\partial |\mathbf{B}|}{\partial z} = -\frac{q}{2} \omega_C R_C^2 \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} \quad (6.27)$$

Multiplicando esta expresión por  $v_z$ , se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_z^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial z}$$

Dado que la energía total de la partícula se conserva, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = 0$$

de donde

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \mu \frac{\partial B}{\partial z} \quad (6.28)$$

Si comparamos [6.28] con [6.23], se llega de nuevo a la conclusión de que el momento magnético de la partícula se conserva:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

La conservación del momento magnético en un campo magnético no homogéneo que varía lentamente conduce a consecuencias muy importantes. Dado que

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B} \quad \text{y} \quad R_C = \frac{m v_{\perp}}{q B} = \frac{\sqrt{2mW_{\perp}}}{q B} \sim \frac{1}{\sqrt{B}}$$

el radio de la circunferencia a lo largo de la cual se mueve la partícula disminuye en el sentido en que aumenta el campo (en la figura 6.6 corresponde al sentido positivo del eje Z).

Sea  $\theta_o$  el ángulo formado por el vector velocidad de la partícula y el eje Z en determinado punto  $z_o$ , y  $\theta$  el mismo ángulo en un punto arbitrario. Entonces en el punto  $z = z_o$  se tiene

$$W_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 \sin^2 \theta_o = \mu B(z_o)$$

donde  $B(z_o)$  es el valor del campo magnético en el punto  $z_o$ . En el punto  $z$  la intensidad del campo es igual a  $B(z)$  y

$$W_{\perp} = \mu B(z) = \frac{1}{2} m v_o^2 \sin^2 \theta$$

Por ello se tiene

$$\sin \theta = \sin \theta_o \sqrt{\frac{B(z)}{B(z_o)}}$$

Debido al movimiento de la partícula a lo largo del eje Z y al aumento de la intensidad del campo, el ángulo  $\theta$  crece. En el punto  $z^*$ , en el cual

$$\sqrt{\frac{B(z^*)}{B(z_o)}} \approx \frac{1}{\sin \theta_o}$$

se tiene  $\sin \theta = 1$  y  $v_{\perp} = v_o$ . Esto significa que la componente de la velocidad de la partícula  $v_z$  se anula. La partícula no puede moverse más allá del punto  $z^*$  y vuelve al dominio en que  $z < z^*$ . La región  $z > z^*$ , en la que no puede penetrar la partícula cuya velocidad inicial es  $v_{\perp} = v_o \sin \theta_o$ , se llama **espejo magnético**.

La reflexión de partículas por un espejo magnético representa un papel fundamental en diferentes aparatos electrónicos. Fermi lanzó la idea de la posibilidad de que las partículas en los rayos cósmicos se aceleren como resultado de la reflexión por espejos magnéticos. El papel de éstos pueden desempeñarlo las nubes de materia interestelar. Si se admite que en las nubes formadas por esta materia la intensidad del campo magnético es mayor que en el espacio que las separa, todas las partículas situadas entre nubes serán reflejadas por ellas como por espejos magnéticos. Admitamos que las nubes se mueven acercándose unas a otras con velocidades  $v$ . Las partículas cargadas que chocan con las nubes en movimiento y que son reflejadas por ellas cambian su velocidad en  $2v$  en cada reflexión. Prueban los cálculos que en las condiciones cósmicas las velocidades de las partículas pueden alcanzar valores enormes.

Para terminar no debemos olvidar que todos los resultados obtenidos se refieren tan sólo al movimiento de partículas con velocidades que son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Para velocidades relativistas el estudio del movimiento de partículas cargadas en el seno de campos electromagnéticos se complica considerablemente y es necesario acudir a la formulación covariante de dicho campo.