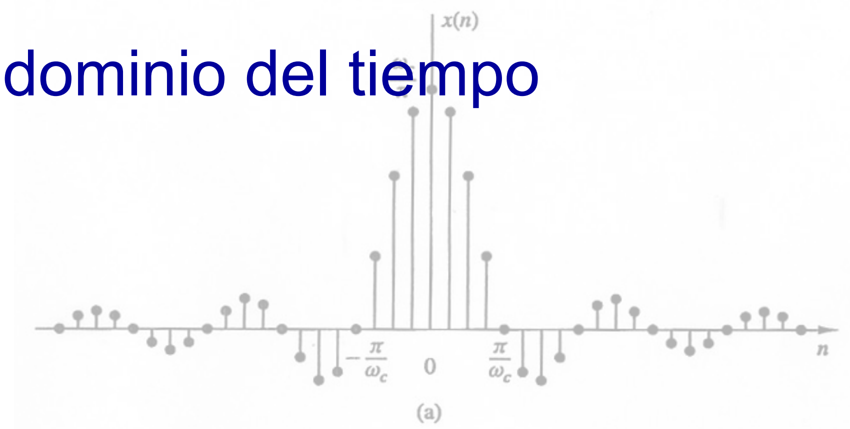
Señales y Sistemas: Tema II

Sistemas en el dominio del tiempo

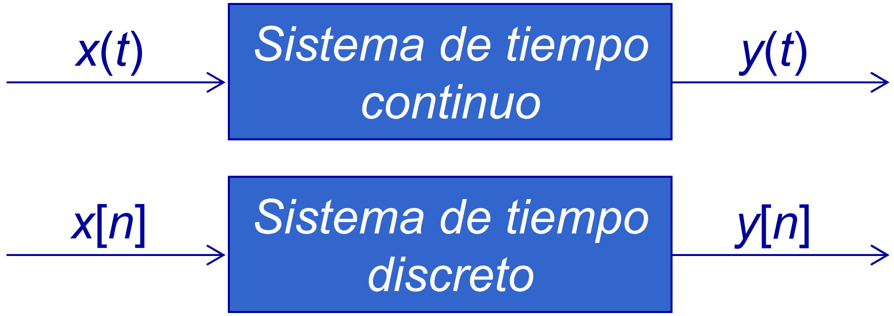


Sistemas en el dominio del tiempo

1. Definición de sistemas y de sus propiedades.
2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI).
3. Representación de señales en términos de impulsos.
4. Sistemas de tiempo discreto lineales e invariantes en el tiempo.
5. Sistemas de tiempo continuo lineales e invariantes en el tiempo.
6. Propiedades de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

1 Definición de sistemas y sus propiedades

*"Se entiende por **sistema** cualquier **transformación** de una señal (que llamamos de **entrada**) en otra señal (que llamamos de **salida**)"*



Relación **entrada-salida**:

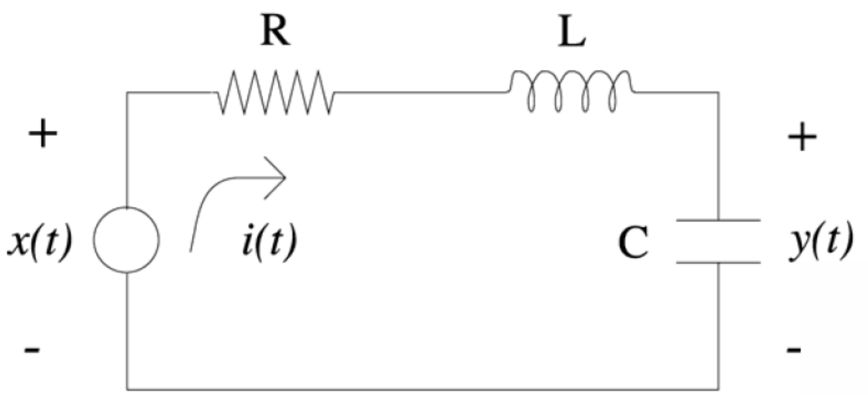
expresión matemática que expresa la **salida** como **función** de la **entrada** del sistema: $y(t)=f\{ x(t) \}$; $y[n]=f\{ x[n] \}$

Ejemplos:

- Aplicación de un voltaje a un altavoz → producción de un sonido
- Cambio de presión en un micrófono → producción de una señal eléctrica
- Luz que incide sobre un fotodiodo → corriente fotogenerada
- Presión sobre el acelerador → aumento de la velocidad de un coche
- Voltaje aplicado a un amplificador → voltaje amplificado

Ejemplos de sistemas (I)

- Circuito RLC

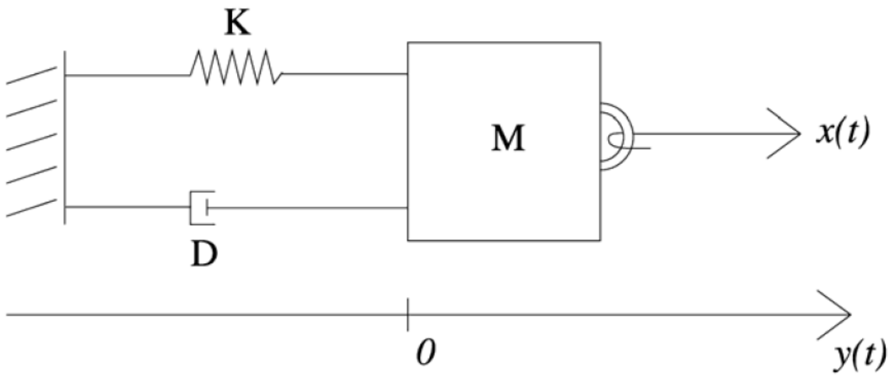


$$\left.\begin{array}{l} R\cdot i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ i(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt} \end{array}\right\} \longrightarrow LC\frac{d^2y(t)}{dt} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Ejemplos de sistemas (II)

- Sistema mecánico

  $x(t)$= fuerza aplicada
  K= cte. del muelle
  D= cte. de amortiguación
  $y(t)$= desplazamiento



$$\left. M\frac{d^2y(t)}{dt} = x(t) - Ky(t) - D\frac{dy(t)}{dt} \right\} \longrightarrow M\frac{d^2y(t)}{dt} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

- Observación: se pueden modelar matemáticamente sistemas físicos muy diferentes de forma muy similar

Ejemplos de sistemas (III)

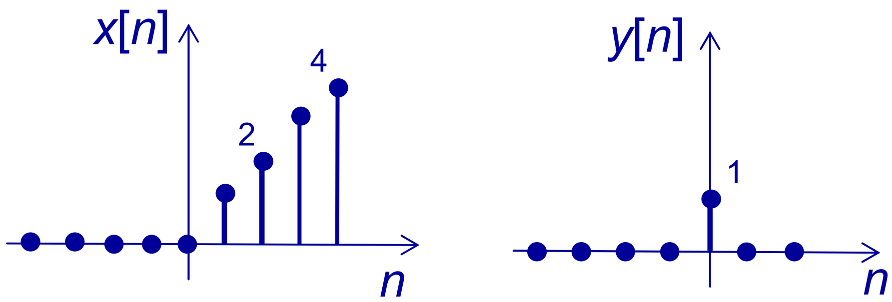
- Detector de bordes "rudimentario"

  $y[n]=x[n+1]-2\cdot x[n]+x[n-1]=\{ x[n+1]-x[n] \}-\{ x[n]-x[n-1] \} \Rightarrow$ "segunda diferencia"

- Este sistema detecta cambios de pendiente en la señal

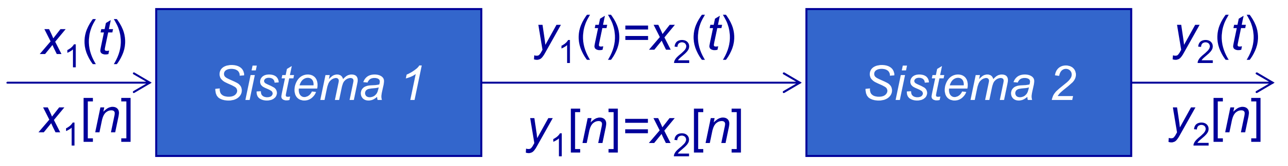
  $x[n]=n \quad \Rightarrow \quad y[n]=0$

  $x[n]=n\cdot u[n] \quad \Rightarrow \quad y[n]$

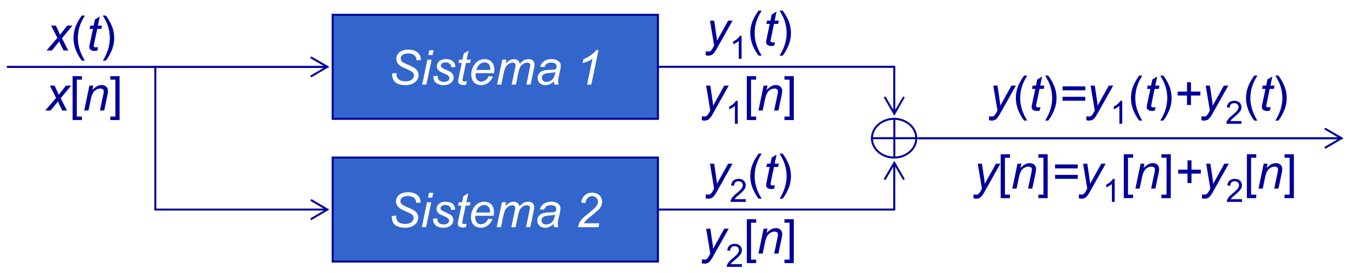


Interconexión de sistemas

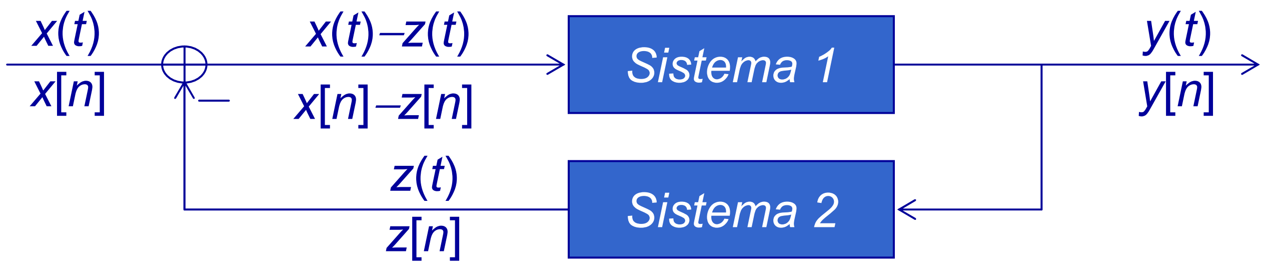
Interconexión en **serie** o **cascada**:



Interconexión en **paralelo**:



Interconexión de **realimentación**:



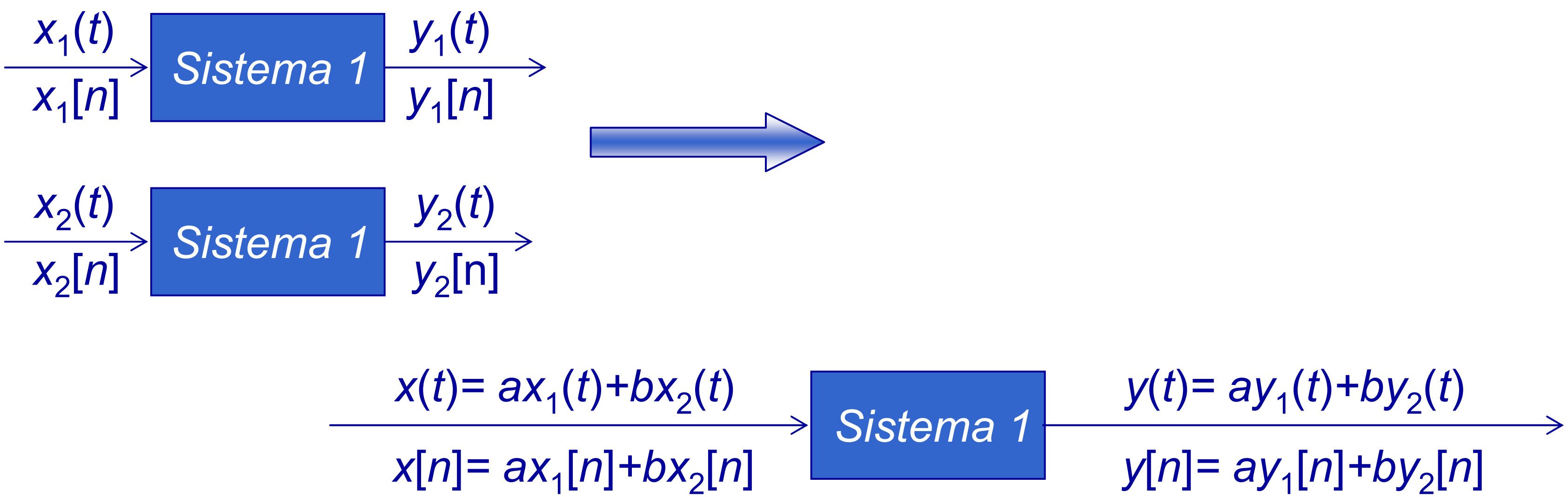
Propiedades de sistemas

- Detrás de las propiedades de los sistemas hay implicaciones físicas y prácticas muy importantes
- Las propiedades nos proporcionan una perspectiva y una estructura que podemos explotar para analizar y comprender los problemas más a fondo
- Nos interesa caracterizar las siguientes propiedades de los sistemas:
  - Linealidad
  - Invarianza en el tiempo
  - Causalidad
  - Memoria
  - Estabilidad
  - Invertibilidad

Linealidad (I)

***Linealidad** (L): Se dice que un sistema es lineal* $\Leftrightarrow$ *se cumple que dadas dos señales de **entrada $x_1(t)$** y **$x_2(t)$** cuyas correspondientes **salidas** son **$y_1(t)$** e **$y_2(t)$**, entonces para una **entrada $x(t)= ax_1(t)+bx_2(t)$**, la **salida** es **$y(t)= ay_1(t)+by_2(t)$**, cualesquiera que sean a, b, $x_1(t)$ y $x_2(t)$*

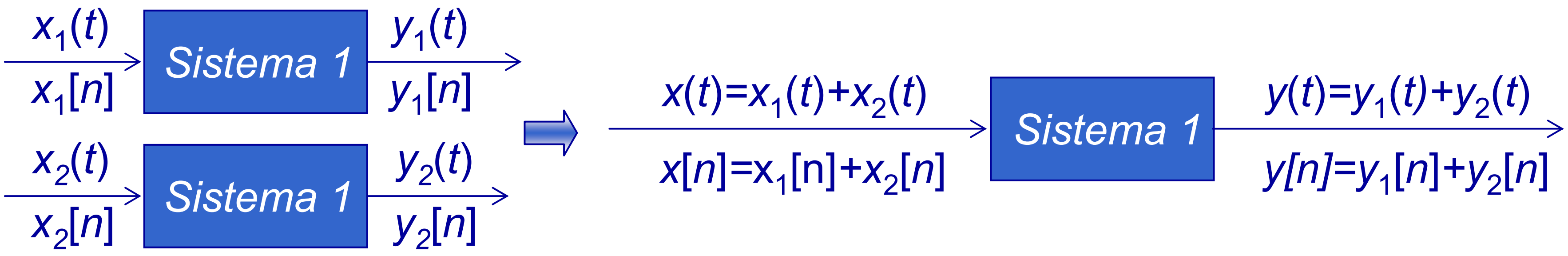
La definición de linealidad para un sistema de tiempo discreto es igual cambiando *t* por *n*



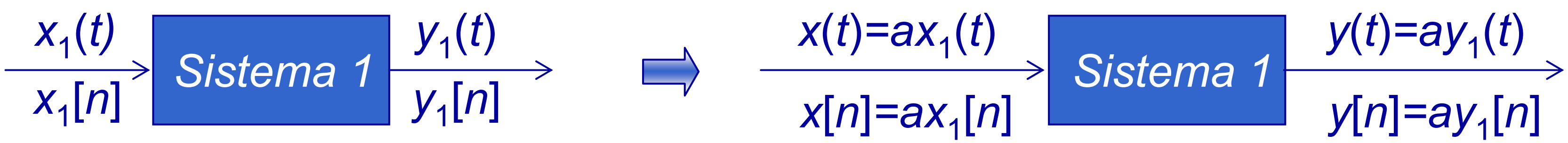
Linealidad (II)

Equivale a **aditividad** y **proporcionalidad** simultáneamente:

Aditividad:



Proporcionalidad:



Si $x(t)=0$ ($x[n]=0$) y el sistema es lineal, la salida es nula: $y(t)=0$ ($y[n]=0$)

Sistema incrementalmente lineal: se cumple la linealidad para la diferencia (o incrementos) de entradas

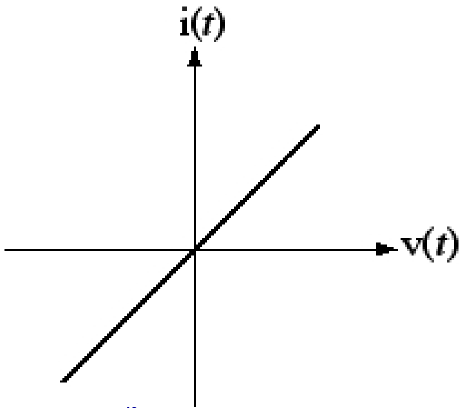
Linealidad o no linealidad

- Muchos sistemas son no lineales.
  - Por ejemplo: muchos elementos de circuitos (ej., diodos), dinámica de aviones, modelos econométricos, etc.

- No obstante, nos centramos exclusivamente en los sistemas lineales. ¿Por qué?
  - Los sistemas lineales describen representaciones precisas del comportamiento de muchos sistemas (ej., resistencias lineales, condensadores, otros ejemplos mencionados anteriormente, etc.)
  - Se pueden linealizar modelos con el fin de examinar perturbaciones de "pequeña señal" alrededor de "puntos de funcionamiento"
  - Los sistemas lineales son manejables de forma analítica, facilitando bases para herramientas importantes y una considerable perspectiva.

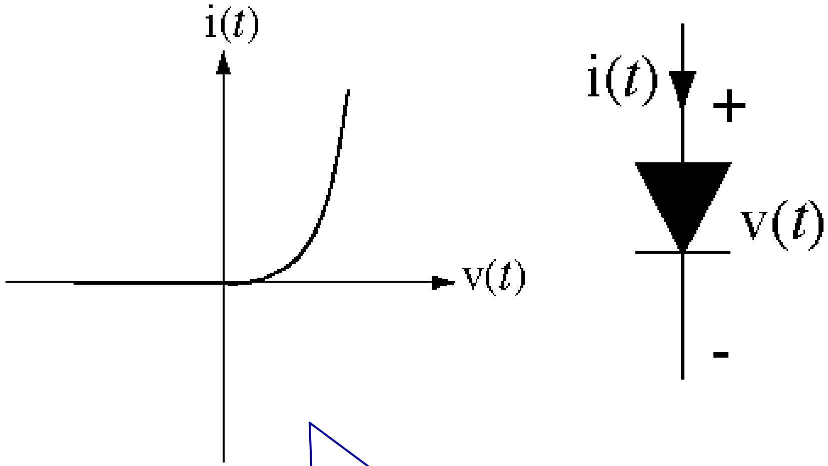
Ejemplo

Diagrama V-I de una resistencia



Lineal

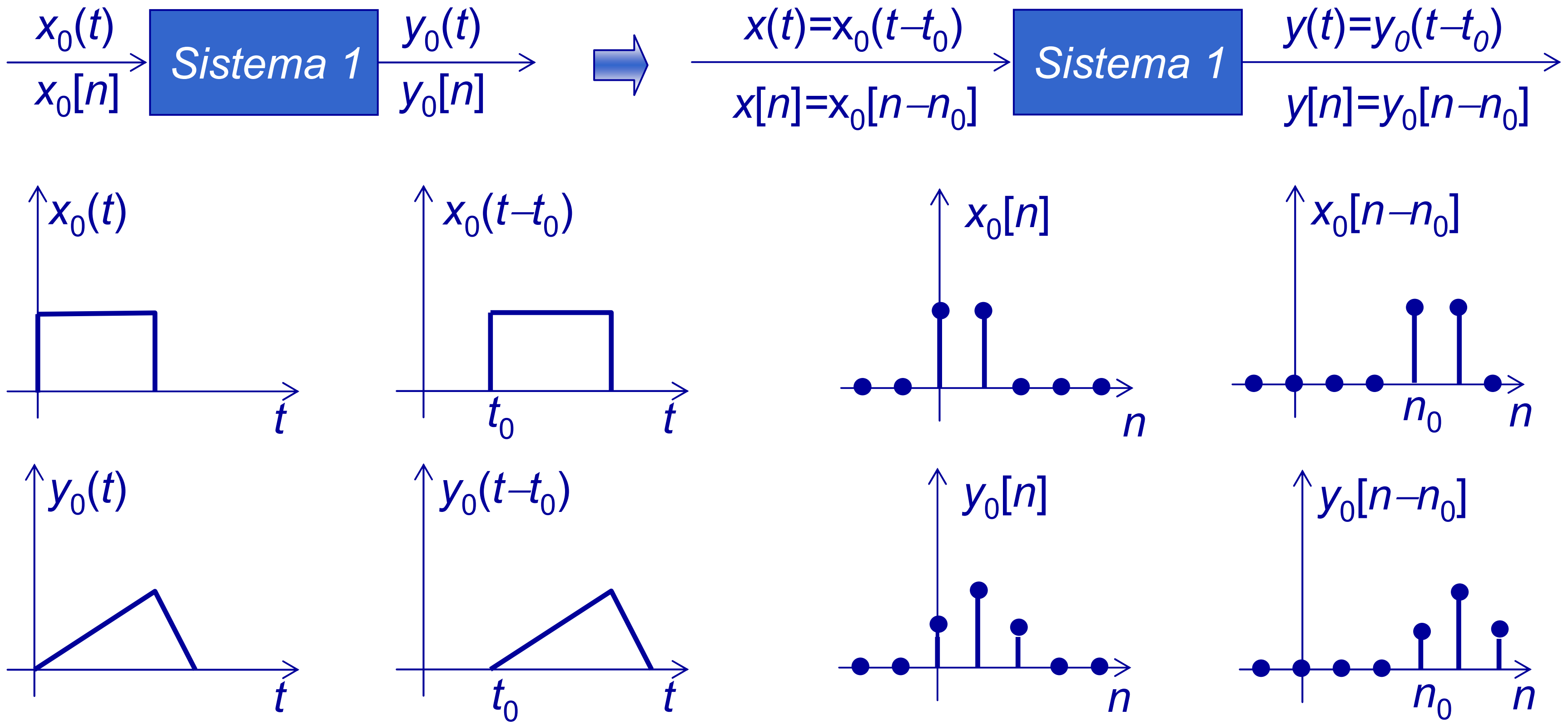
Diagrama V-I de un diodo



No Lineal

Invarianza en el tiempo

Invarianza en el tiempo *(TI): Se dice que un sistema es invariante en el tiempo $\Leftrightarrow$ se cumple que dada una señal de entrada $x_0(t)$ cuya salida correspondiente sea $y_0(t)$, entonces para una entrada $x(t)= x_0(t - t_0)$, la salida es $y(t)= y_0(t-t_0)$ cualesquiera que sean $x_0(t)$ y t_0*



Causalidad

***Causalidad**: Se dice que un sistema es causal ⇔ su respuesta en cada instante **depende exclusivamente** de los valores de la entrada en el **instante actual** o en **instantes pasados**.*

Equivale a decir que la respuesta del sistema comienza en el instante en que comienza la entrada o en instantes posteriores cualquiera que sea la señal de entrada. Es decir, el sistema cumple el principio de causalidad o la relación causa-efecto: el efecto siempre es simultáneo o posterior a la causa. Como consecuencia, todos los sistemas que funcionan en tiempo real son causales

Ej. Causal:

- Pisar el pedal del freno ⇒ el coche frena
- Aplicación de una tensión a un circuito ⇒ paso de corriente
- Pulsar el botón de encendido ⇒ encendido de un equipo

Ej: No causal:

- Grabar una secuencia ⇒ reproducción en sentido inverso
- Registrar temperaturas ⇒ presentar temperatura media del día

Memoria

***Memoria**: Se dice que un sistema no tiene memoria ⇔ la **salida** en cada instante **depende exclusivamente** de los valores de la **entrada** en el **instante actual** (no depende del futuro ni del pasado).*

- Un sistema **sin memoria** es **causal**.
- Un sistema **sin memoria no** almacena **energía** (datos).
- Un sistema **no causal** tiene **memoria**

Ej. Sin memoria:

- Aplicar una tensión a una resistencia ⇒ paso de corriente
- Amplificar idealmente una señal: $y(t)=a\cdot x(t)$
- Multiplicar por sí misma una señal: $y(t)=x^2(t)$

Ej. Con memoria:

- Corriente por una bobina ⇒ generación de una tensión
- Paso de corriente por condensador ⇒ generación de tensión
- Derivar o integrar una señal
- Retrasar (o adelantar) una señal: $y[n]=x[n+n_0]$

Estabilidad

***Estabilidad**: Se dice que un sistema es estable $\Leftrightarrow$ para cualquier **entrada acotada**, la **salida es acotada** (criterio bound input, bound output: **BIBO**).*

De forma matemática se expresa como:

Un sistema es estable (siendo A y B finitos) $\Leftrightarrow$

$\forall x(t)$ *t.q.* $|x(t)| < A \Rightarrow |y(t)| < B$, $(\forall x[n]$ *t.q.* $|x[n]| < A \Rightarrow |y[n]| < B)$

Ej. Estable:

- Amplificar o atenuar una señal $y[n]=a \cdot x[n]$,
- Retrasar o adelantar una señal: $y(t)=x(t-t_0)$
- Obtener la media de una señal en un intervalo finito...

Ej. Inestable:

- Integrar o derivar una señal
- Multiplicar una señal por el tiempo: $y[n]=n \cdot x[n]$

Invertibilidad

***Invertibilidad**: Se dice que un sistema es invertible $\Leftrightarrow$ conocida la **salida** del sistema se puede determinar **unívocamente** la **entrada** correspondiente*

Ej. Invertible:

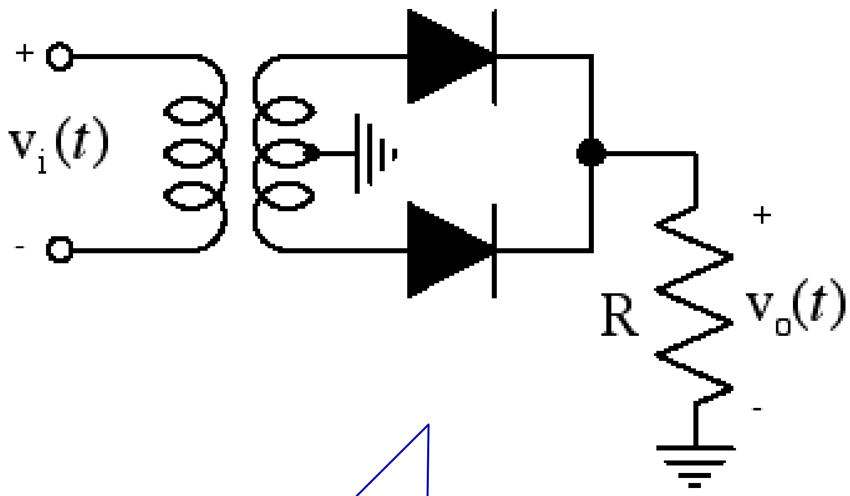
- Amplificar o atenuar una señal $y[n]=a\cdot x[n]$
- Retrasar o adelantar una señal: $y(t)=x(t+t_0)$
- Se puede despejar unívocamente $x(t)$ (o $x[n]$) de la relación entrada-salida

Ej. No invertible:

- Derivar una señal: $y(t)=dx(t)/dt$
- Elevar a una potencia entera una señal: $y(t)=x^2(t)$

Ejemplo

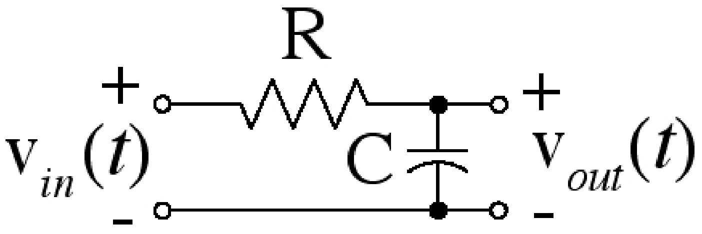
- Un rectificador de onda completa es un sistema no invertible



No Invertible

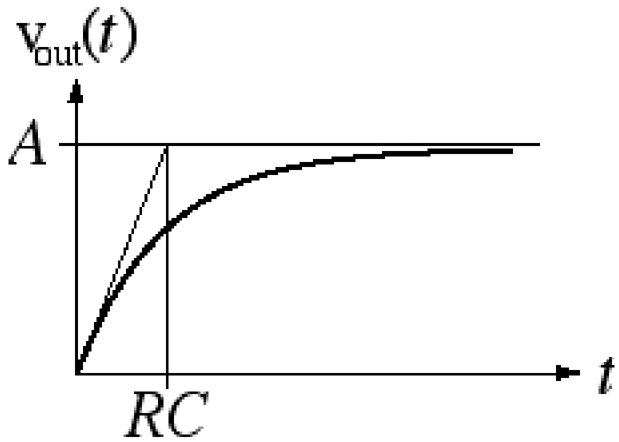
2. Sistemas Lineales e invariantes en el tiempo

- Un filtro paso bajo RC es un sistema eléctrico LTI
- Se excita con una tensión, $v_{in}(t)$, y responde con $v_{out}(t)$,



$$v_{in}(t) = Au(t)$$

$$v_{out}(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$$



Si duplicamos la excitación, se duplica la salida
Si aplicamos la excitación en otro instante de tiempo la salida no cambia

2. Sistemas Lineales e invariantes en el tiempo

- Sistemas que cumplen la propiedad de linealidad: superposición y proporcionalidad
- Sistemas invariantes en el tiempo: ante una misma entrada aplicada en distintos momentos responde con la misma salida

3. Representación de señales en términos de impulsos

*"El **impulso** (tanto en tiempo continuo como discreto) permite **construir**, mediante **combinación lineal**, una clase muy amplia de **señales**"*

Esta afirmación es válida para señales de tiempo continuo y para señales de tiempo discreto

i. Representación de señales discretas en términos de impulsos discretos

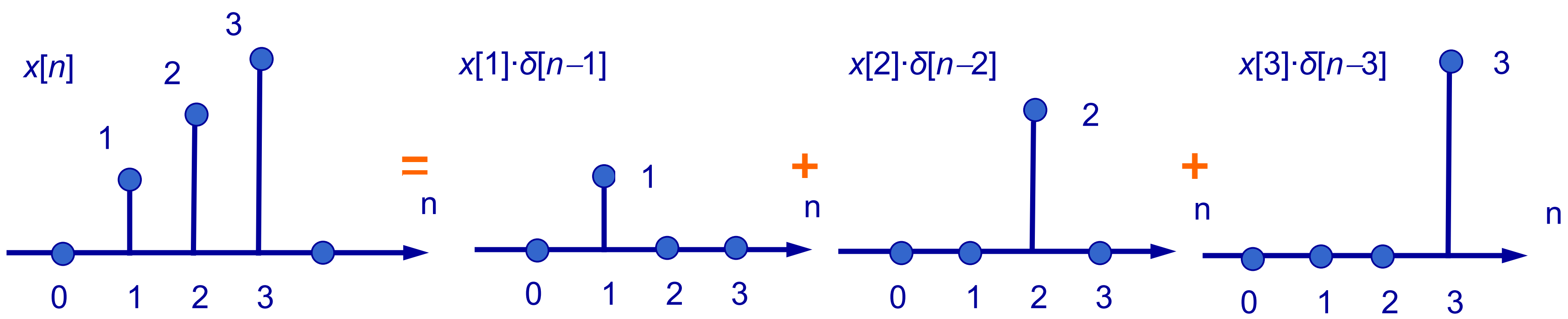
ii. Representación de señales continuas en términos de impulsos continuos

Representación de señales en términos de impulsos. Señales de tiempo discreto (TD)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ 0, & si\ n \neq 0 \end{cases} \quad ; \quad x[n]\cdot\delta[n] = x[0]\cdot\delta[n] = \begin{cases} x[0], & si\ n = 0 \\ 0, & si\ n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[n]\cdot\delta[n-n_0] = x[n_0]\cdot\delta[n-n_0] = \begin{cases} x[n_0], & si\ n = n_0 \\ 0, & si\ n \neq n_0 \end{cases}$$

Supongamos una señal cualquiera $x[n]$, por ej. $x[n]=n\cdot(u[n]-u[n-4])$



Se comprueba que: $x[n]=x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+x[3]\delta[n-3]$

Representación de señales en términos de impulsos. Señales de TD

Si la duración de la señal $x[n]$ fuera mayor, sólo habría que incluir más términos en la suma de modo que:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

A esta suma se le llama **suma de convolución** y es un resultado válido para cualquier señal $x[n]$: una señal de TD se puede representar como una **combinación lineal de impulsos desplazados** cuyos coeficientes son los propios valores de la señal en cada instante al que se ha desplazado cada impulso. Se representa por:

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

Por ejemplo, para la función escalón se tiene:

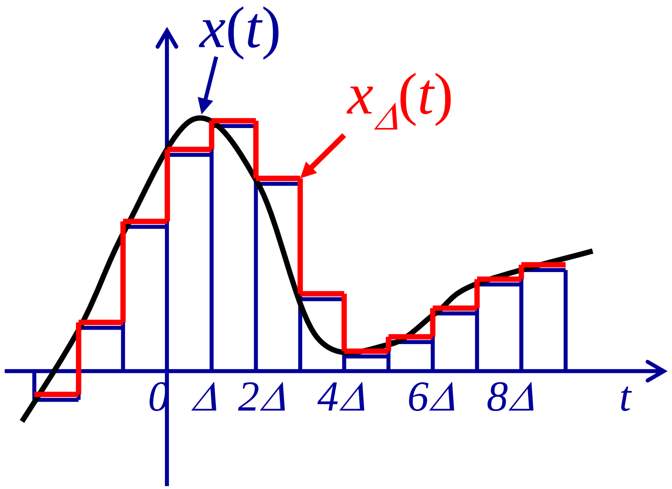
$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Representación de señales en términos de impulsos. Señales de tiempo continuo (TC)

Volvemos a emplear la función auxiliar $\delta_\Delta(t)$:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ 1/\Delta, & si\ 0 < t < \Delta \\ 0, & si\ t > \Delta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

Dada una señal $x(t)$ cualquiera se puede obtener una aproximación mediante versiones desplazadas y escaladas en amplitud de $\delta_\Delta(t)$:



$$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta,$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} x_\Delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta$$

$$\text{si} \;\; k\Delta \to \tau \;\; \text{y} \;\; \Delta \to d\tau \;\; \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)}$$

4. Sistemas TD lineales e invariantes

- Son sistemas de TD que cumplen las propiedades de:
  - **Linealidad**
  - **Invarianza** en el tiempo
- Se representan como:

- La relación entrada/salida viene dada por la **suma de convolución**
- Están caracterizados por su respuesta **al impulso**

La suma de convolución (I)

Consideramos un sistema LTI de TD y una señal de entrada arbitraria:

Podemos expresar la señal de entrada $x[n]$ como **suma de convolución (o convolución discreta)**:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Vemos que se trata de una combinación lineal de impulsos desplazados en el tiempo

Supongamos que conocemos la salida del sistema $h_k[n]$ cuando la entrada es un impulso desplazado $\delta[n-k]$

La suma de convolución (II)

Si aprovechamos la propiedad de **linealidad** del sistema podemos escribir:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$

Se trata de la misma combinación lineal (coeficientes $x[k]$) que representa a $x[n]$, pero de las respuestas a los impulsos desplazados

Por **invarianza** temporal del sistema $\Rightarrow$ la respuesta $h_k[n]$ a un impulso desplazado $\delta[n-k]$ corresponde al desplazamiento de la respuesta $h_0[n-k]$ al impulso sin desplazar $\delta[n]$

$$h_k[n] = h_0[n-k] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_0[n-k]$$

Como sólo necesitamos conocer $h_0[n]$, llamamos $h[n]= h_0[n]$ y la relación entrada salida que describe al sistema queda:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]}$$

La suma de convolución. Consecuencias

Se puede obtener la salida de un sistema LTI discreto conociendo $h[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

La **respuesta al impulso** $h[n]$ de un sistema LTI de TD **caracteriza completamente al sistema**: permite escribir la relación entrada-salida

Para **caracterizar** un sistema de **TD LTI** basta con **conocer** $h[n]$

Un sistema **NO LTI** también **tendrá respuesta al impulso**, pero en este caso **NO caracteriza al sistema** (no aporta información adicional):

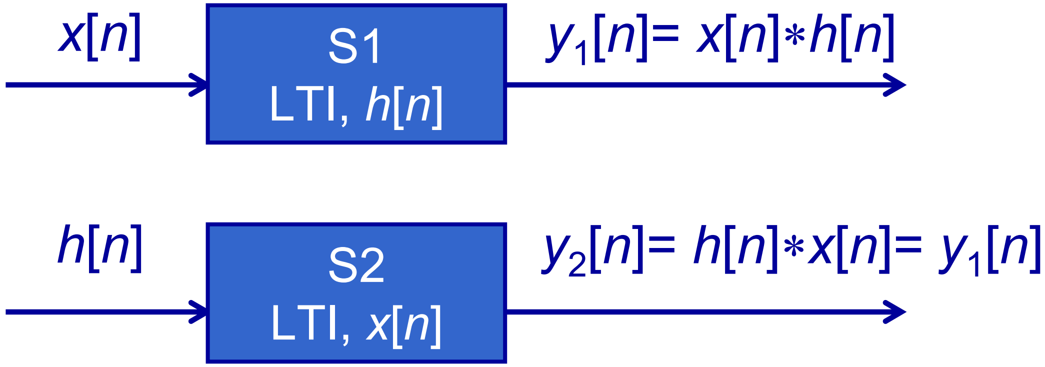
$$y[n] \neq x[n] * h[n]$$

Propiedades de la suma de convolución (I)

a) Propiedad **conmutativa**:

$$x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$$

Aplicado a un sistema LTI

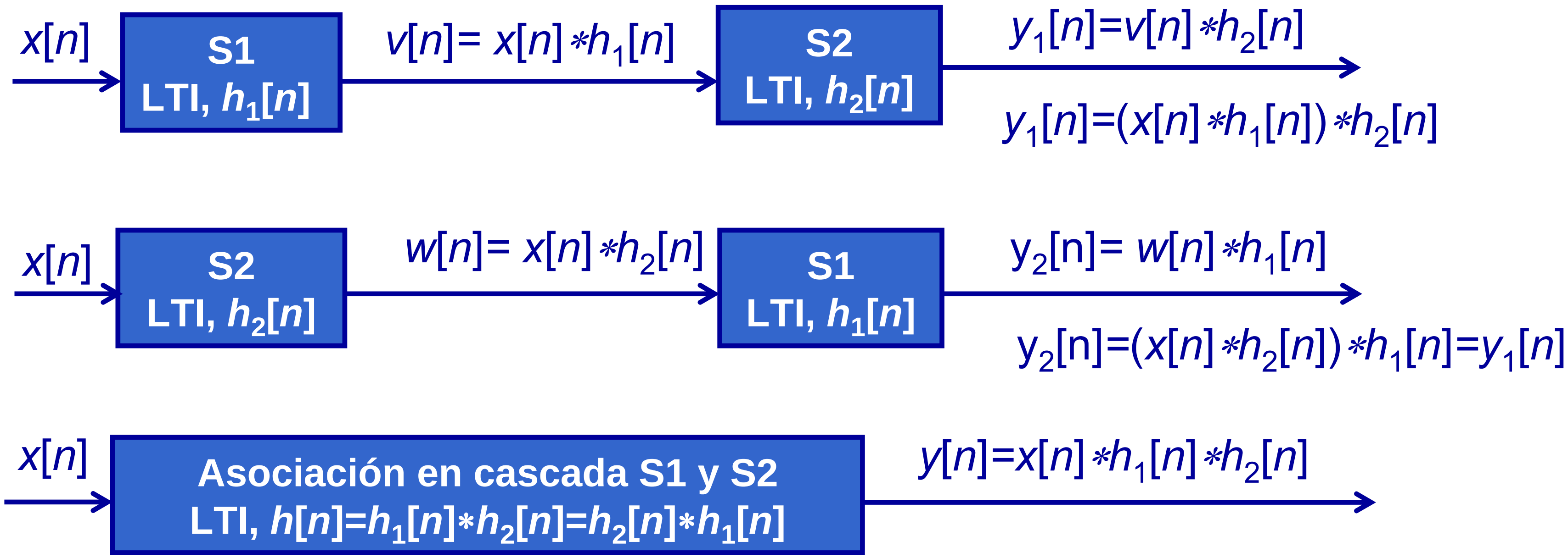


Propiedades de la suma de convolución (II)

b) Propiedad **asociativa**, interconexión en **cascada**:

$$x[n]*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)=\left(x[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]$$

Aplicado a sistemas LTI:



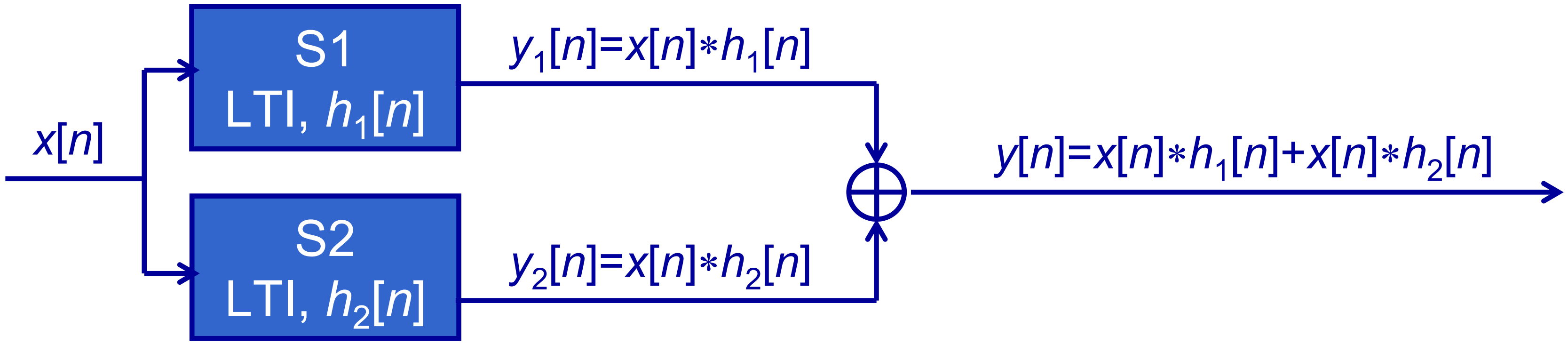
$y[n]=y_1[n]=y_2[n] \Rightarrow$ <u>**Los tres esquemas son equivalentes**</u>

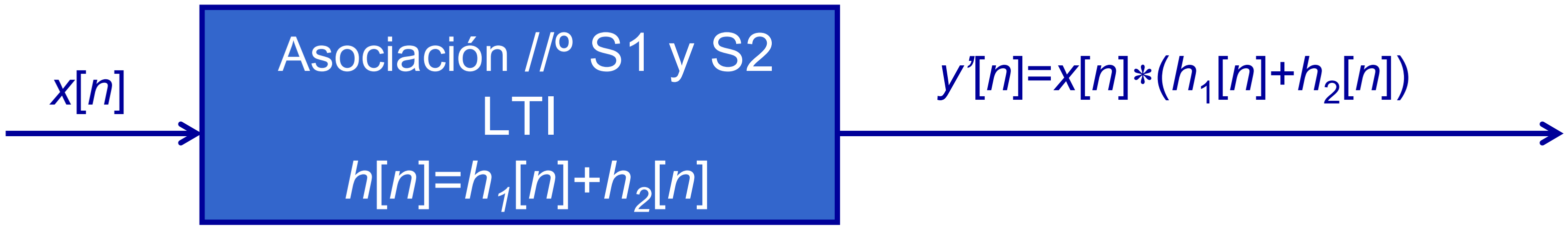
Propiedades de la suma de convolución (III)

c) Propiedad **distributiva** sobre la suma, interconexión en **paralelo**:

$$x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)=\left(x[n]*h_1[n]\right)+\left(x[n]*h_2[n]\right)$$

Aplicado a sistemas LTI:





$y'[n]= y[n]$ $\Rightarrow$ <u>**Los dos esquemas son equivalentes**</u>

5. Sistemas TC lineales e invariantes

- Son sistemas de TC que cumplen las propiedades de:
  - **Linealidad**
  - **Invarianza** en el tiempo
- Se representan como:

- La relación entrada/salida viene dada por la **integral de convolución**
- Están caracterizados por su respuesta **al impulso**

La integral de convolución (I)

Consideramos un sistema LTI de TC y una señal de entrada arbitraria:

Podemos expresar la señal de entrada $x(t)$ como **integral de convolución (o convolución continua)**:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Se trata de una combinación lineal de impulsos desplazados en el tiempo

Supongamos conocida la salida del sistema $h(t)$ cuando la entrada es $\delta(t)$

Por invarianza en el tiempo $\Rightarrow$ si desplazamos la entrada en τ, $\delta(t-\tau)$, la salida se debe desplazar en la misma cantidad: $h(t-\tau)$

La integral de convolución (II)

Como el sistema es lineal y la entrada se puede expresar como una combinación lineal de impulsos desplazados:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{S1}\\ \text{LTI}\end{array}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)}$$

Un sistema LTI de TC queda completamente caracterizado (se puede describir, se puede obtener una relación entrada salida) si se conoce su respuesta al impulso $h(t)$:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{S1}\\ \text{LTI, } h(t)\end{array}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

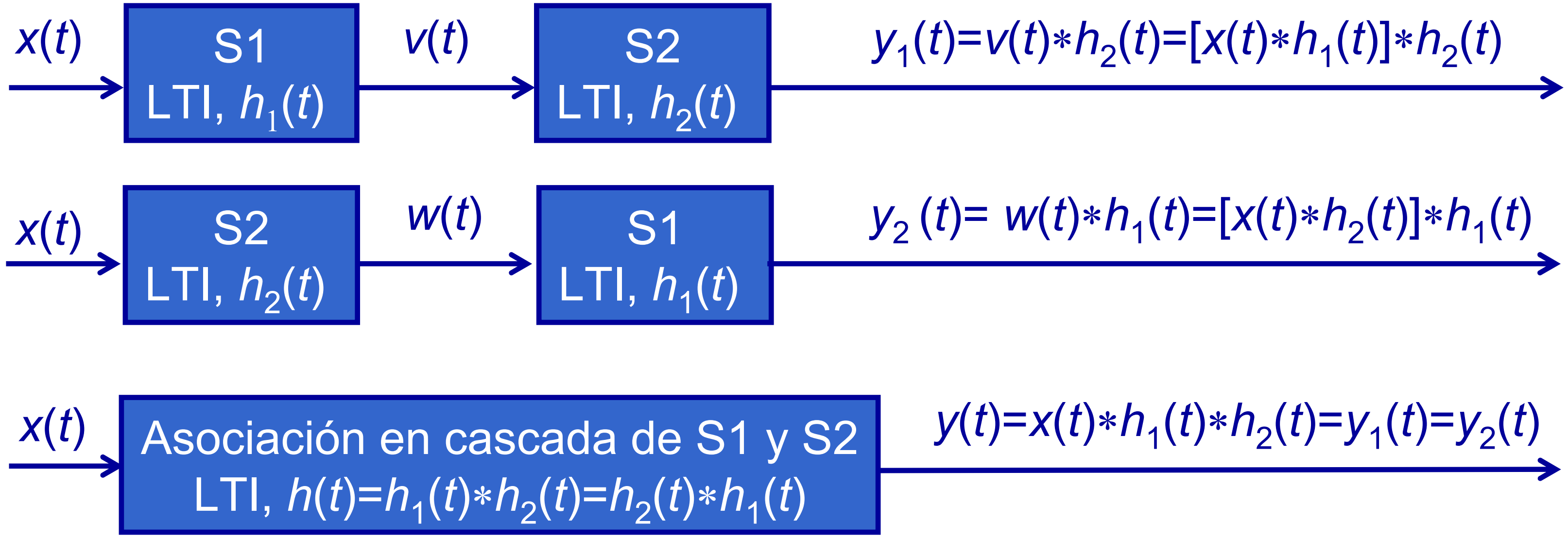
Propiedades de la integral de convolución (I)

a) Propiedad conmutativa: $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

b) Propiedad asociativa, interconexión en cascada:

$$x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right] = \left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t)$$

Aplicado a sistemas LTI:



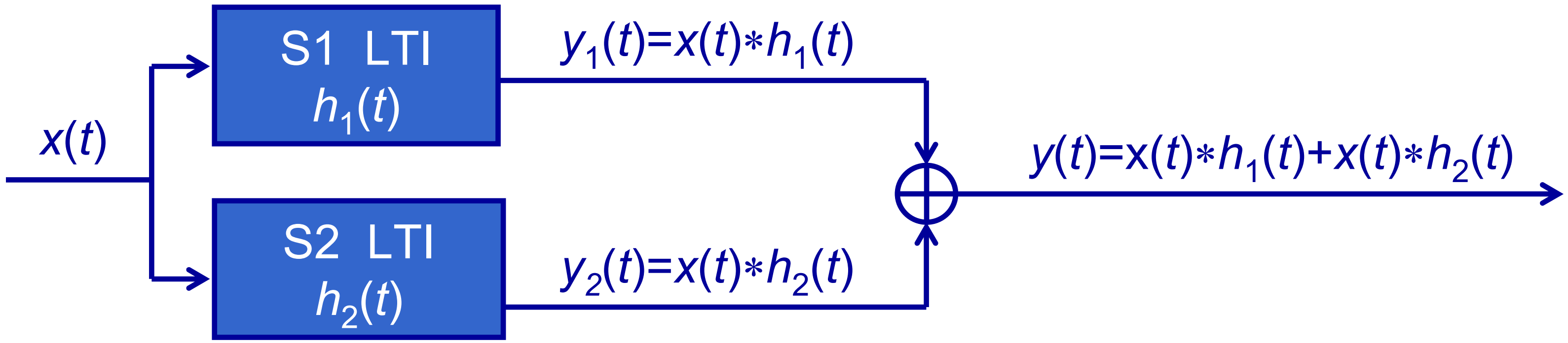
Los tres esquemas son equivalentes

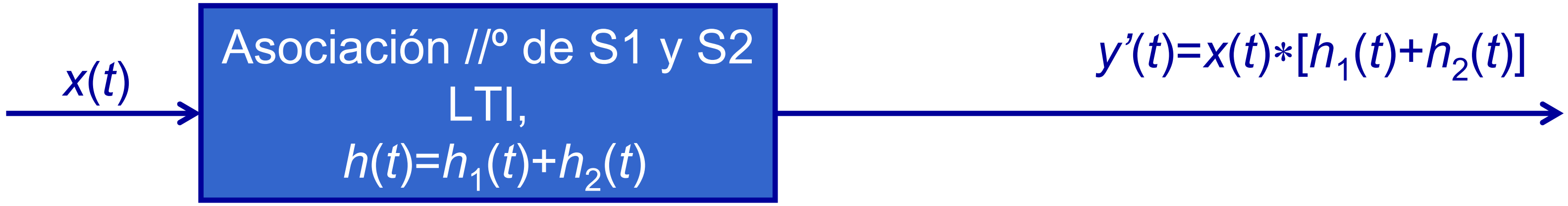
Propiedades de la integral de convolución (II)

c) Propiedad distributiva sobre la suma, interconexión en paralelo:

$$x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right] = \left[x(t) * h_1(t)\right] + \left[x(t) * h_2(t)\right]$$

Aplicado a sistemas LTI:





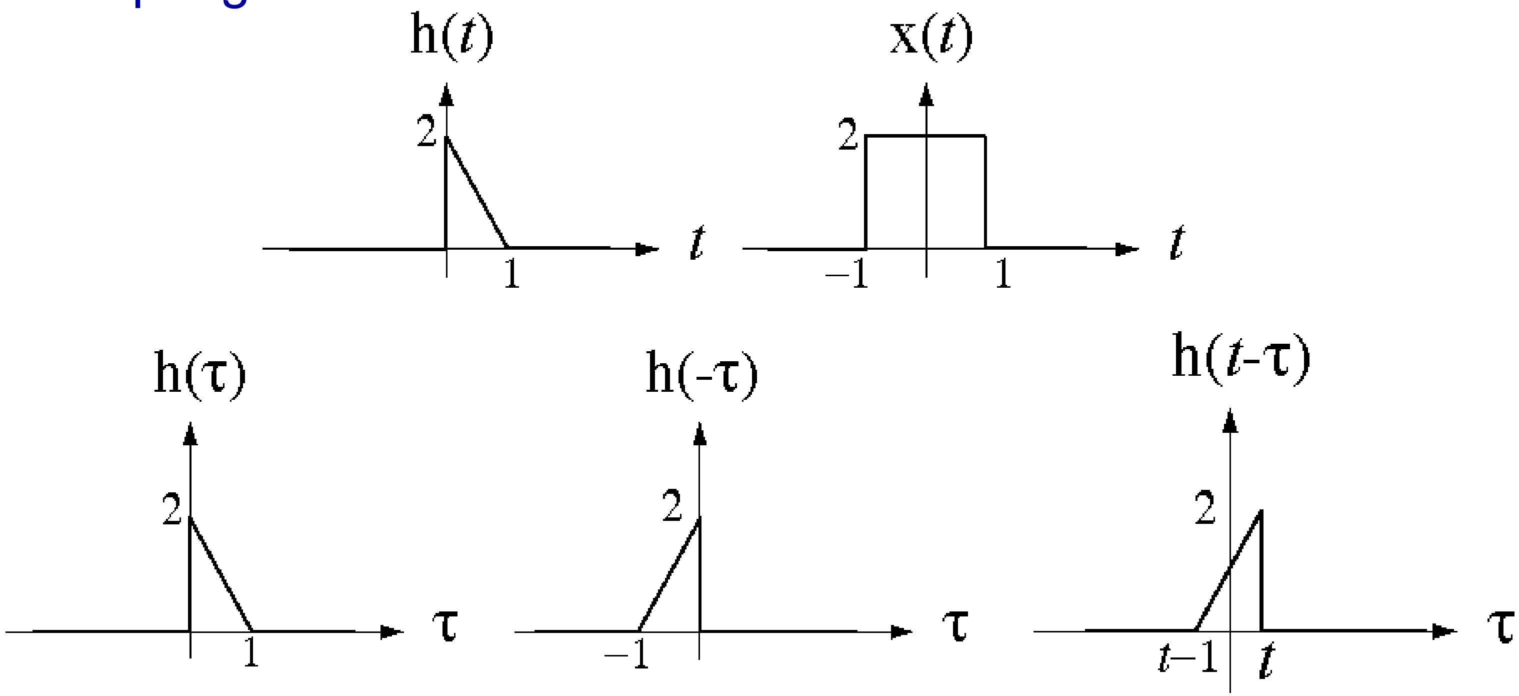
$y'(t)=y(t) \Rightarrow$ **Los dos esquemas son equivalentes**

Interpretación gráfica de la integral de convolución (I)

- Se ha definido la integral de convolución como:

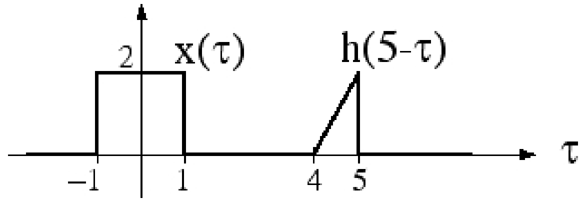
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

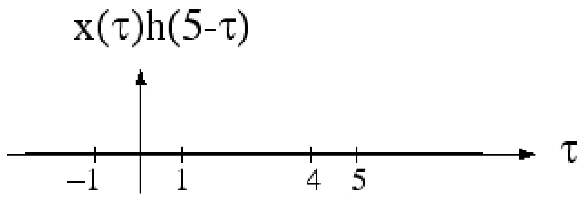
- Supongamos:



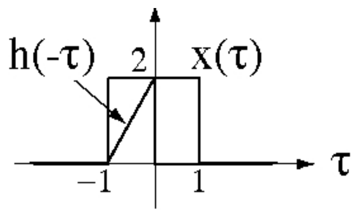
Interpretación gráfica de la integral de convolución (II)

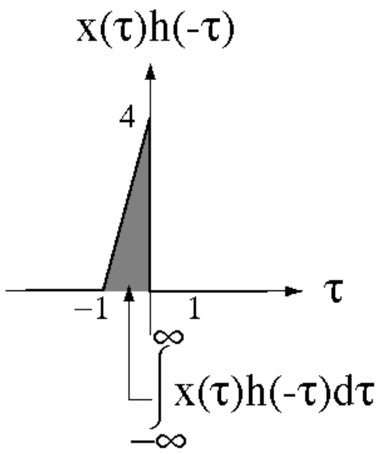
- La convolución es el valor del área bajo el producto de $x(t)$ y $h(t-\tau)$. Esta área depende del valor de *t.*
- Supongamos como ejemplo que $t=5$.





- Para $t=5$ el área bajo el producto es 0 $\Rightarrow$ $y(5)=0$
- Supongamos ahora $t=0$

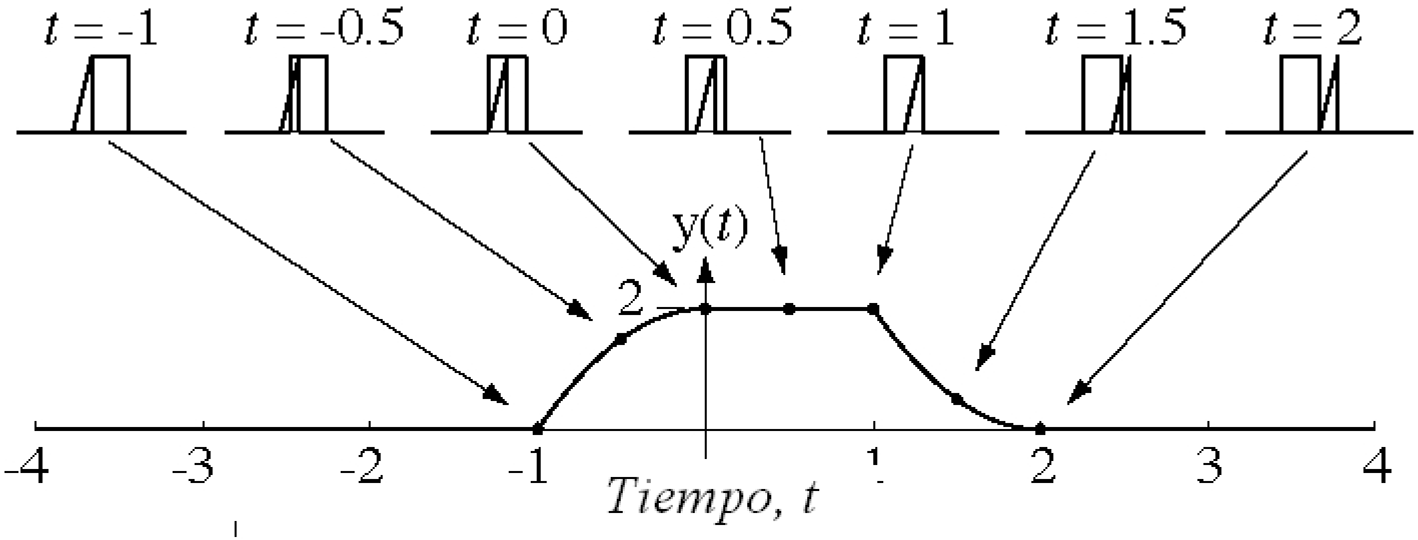




- Entonces $y(0)=2$

Interpretación gráfica de la integral de convolución (III)

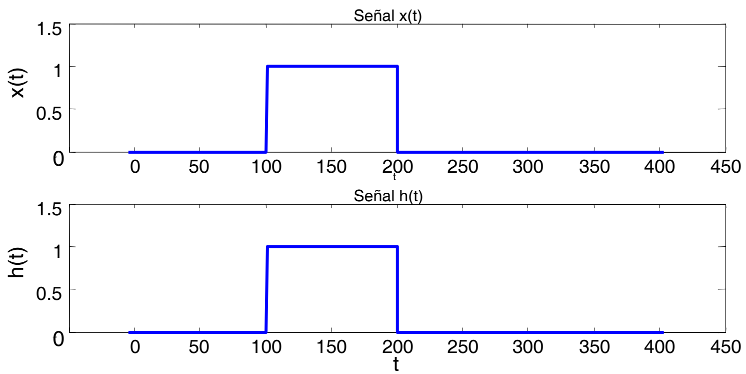
- El proceso completo de convolución arroja la función $y(t)$

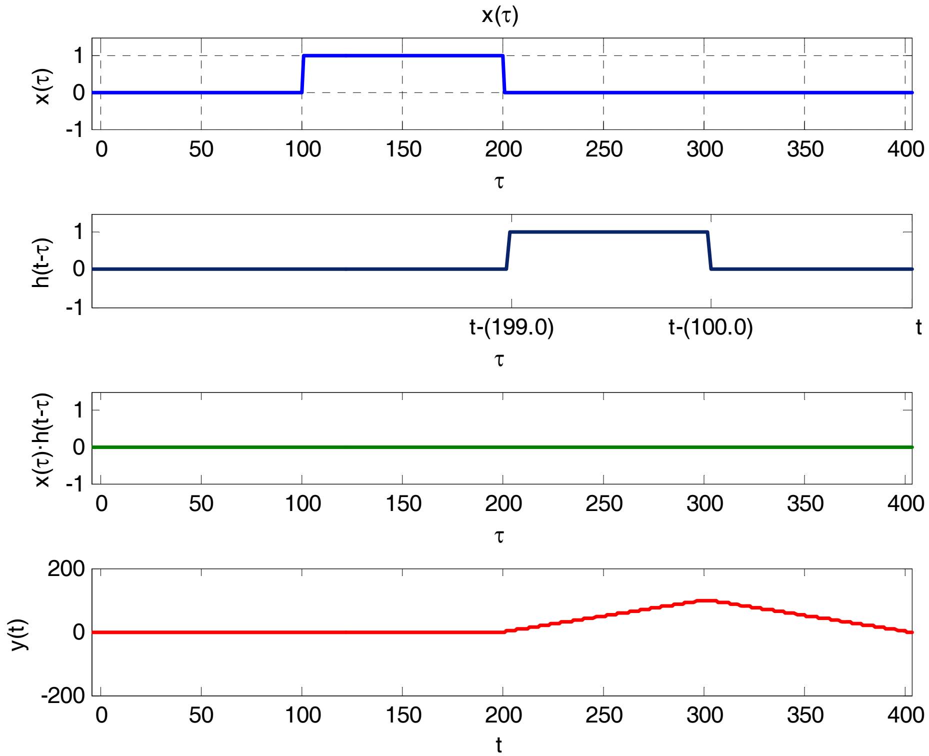


- La determinación correcta de los intervalos de integración es crucial

Ejemplo de convolución

- Convolución de dos **pulsos rectangulares** de igual duración
- $y(t)=x(t)*h(t)$

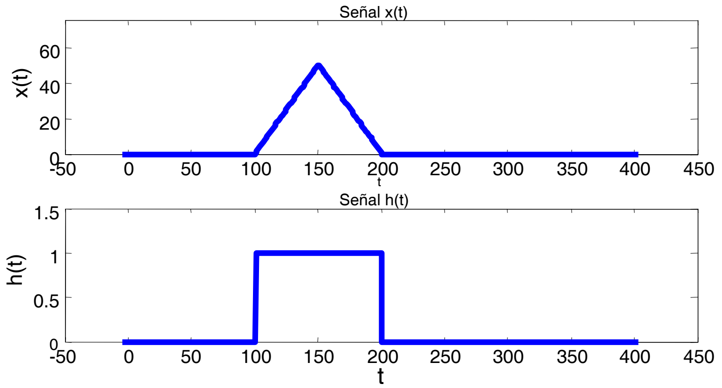


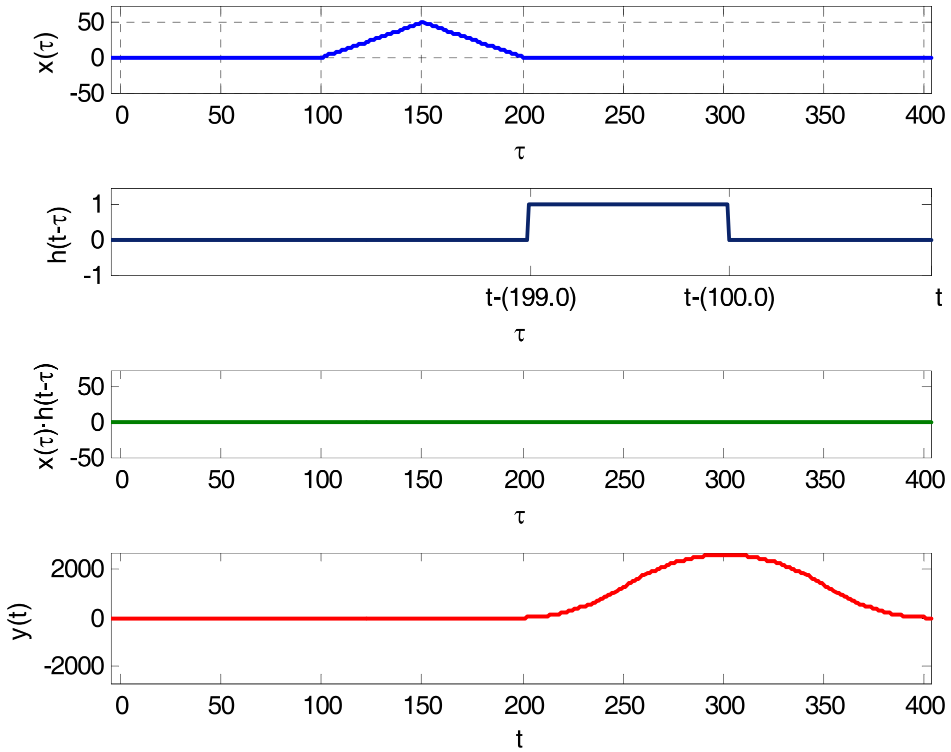


Se duplica la longitud de *y(t)*

Ejemplo de convolución

- Convolución de un **pulso rectangular** y una **señal triangular** de igual duración
- $y(t)=x(t)*h(t)$





Se duplica la longitud de *y(t)*

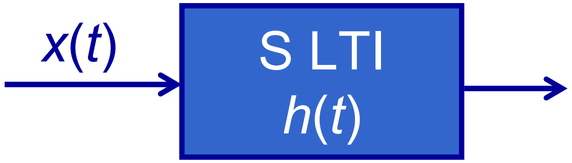
Sistemas particulares

- Algunos sistemas que están caracterizados por una respuesta al impulso particular:
  - Sistema **identidad** $\rightarrow h(t)=\delta(t);\ h[n]=\delta[n]$
  - **Retardador** $\rightarrow h(t)=\delta(t-t_0);\ h[n]=\delta[n-n_0];\ t_0$ y n_0 positivos
  - **Integrador** $\rightarrow h(t)=u(t)$
  - **Derivador** discreto $\rightarrow h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$
  - **Media móvil:** $\rightarrow h[n]=\dfrac{1}{M_1+M_2+1}\displaystyle\sum_{k=-M_1}^{M_2}\delta[n-k]=\begin{cases}\dfrac{1}{M_1+M_2+1} & -M_1\le n\le M_2\\ 0, & \textit{resto}\end{cases}$
  - **Acumulador**: $\rightarrow h[n]=u[n]=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\begin{cases}1, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$

6. Propiedades de los sistemas LTI

- Por definición son **lineales** e **invariantes**
- Caracterizaremos las siguientes propiedades
  - Memoria
  - Invertibilidad
  - Causalidad
  - Estabilidad
- Para ello, sabemos que:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]}$$



$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)}$$

Memoria

Para que un sistema LTI sea **sin memoria**, la relación entrada salida no puede depender más que del **instante actual**.

Como en el caso de los sistemas LTI, la relación entrada salida se puede expresar mediante una convolución,

Dicha suma (integral) de convolución no puede depender de instantes $k \neq 0$ ($t \neq 0$), con lo que la respuesta al impulso $h[n]$ ($h(t)$) deberá ser:

$$\textit{Sistema LTI sin memoria} \Leftrightarrow \begin{cases} h[n] = A \cdot \delta[n] \text{ , } \textit{para TD} \\ h(t) = A \cdot \delta(t) \text{ , } \textit{para TC} \end{cases}$$

Causalidad

En sistemas LTI, la relación E/S se puede expresar mediante convolución
Dicha suma (integral) de convolución **no** puede **depender de instantes futuros** para que el sistema sea **causal**.
Es decir, la suma (integral) de convolución no puede depender de instantes $k>0$ ($t>0$), con lo que la respuesta al impulso $h[n]$ ($h(t)$) deberá ser:

a) TD: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k]$, *para ser causal* $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h[n-k] = 0 \quad \forall k > n \Leftrightarrow h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

b) TC: *Causal* $\Leftrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau > t \Leftrightarrow h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

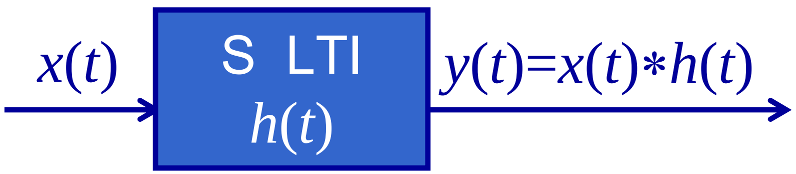
$$\textit{Sistema LTI causal} \Leftrightarrow \begin{cases} h[n] = 0 \ , \ \forall \ n < 0 \ , & \textit{TD} \\ h(t) = 0 \ , \ \forall \ t < 0, & \textit{TC} \end{cases}$$

Estabilidad (I)

Un sistema es **estable** $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall\ x(t) \text{ t.q. } |x(t)| < A \Rightarrow |y(t)| < B,\ (\forall\ x[n] \text{ t.q. } |x[n]| < A \Rightarrow |y[n]| < B)$$

con A y B finitos



a) TC:

Supongamos que: $|x(t)| < A$. Tomando valores absolutos a la salida:

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau) h(t-\tau)| d\tau \Rightarrow$$

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| |h(t-\tau)| d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} A |h(t-\tau)| d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)| d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\text{Si } \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)| d\tau < \infty \Rightarrow |y(t)| < B \right)$$

$\boxed{\Rightarrow \textit{Si } \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \Rightarrow \textit{ el sistema es estable}}$

Se puede comprobar el recíproco

Estabilidad (II)

b) TD:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{S LTI}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow y[n]=x[n]*h[n]$$

Supongamos que: $|x[n]| < A$. Tomando valores absolutos a la salida:

$$|y[n]| = |x[n] * h[n]| = \left|\sum_{-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\right| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[k]h[n-k]| \Rightarrow$$

$$|y[n]| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[k]||h[n-k]| < \sum_{-\infty}^{\infty} A|h[n-k]| = A\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n-k]| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(Si \ \sum_{-\infty}^{\infty} |h[n-k]| < \infty \Rightarrow |y[n]| < B \right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \textit{Si} \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Rightarrow \ \textit{el sistema es estable}}$$

Se puede comprobar el recíproco

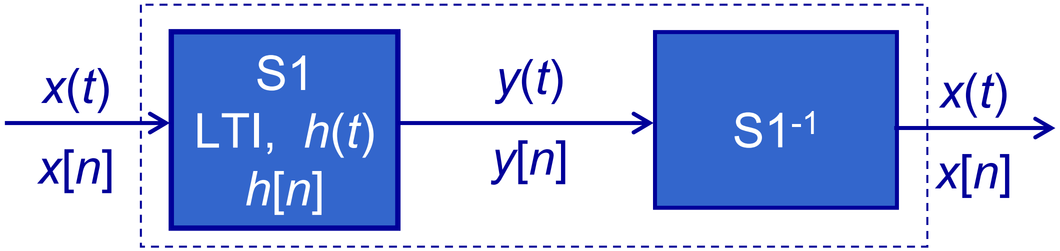
Estabilidad (III)

- En resumen:
  - Un sistema LTI de **TC** es **estable** si y solo si su respuesta al impulso es **absolutamente integrable**
  - Un sistema LTI de **TD** es **estable** si y solo si su respuesta al impulso es **absolutamente sumable**

$$\textit{Sistema LTI estable} \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{TC:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty \\ \textit{TD:} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \end{cases}$$

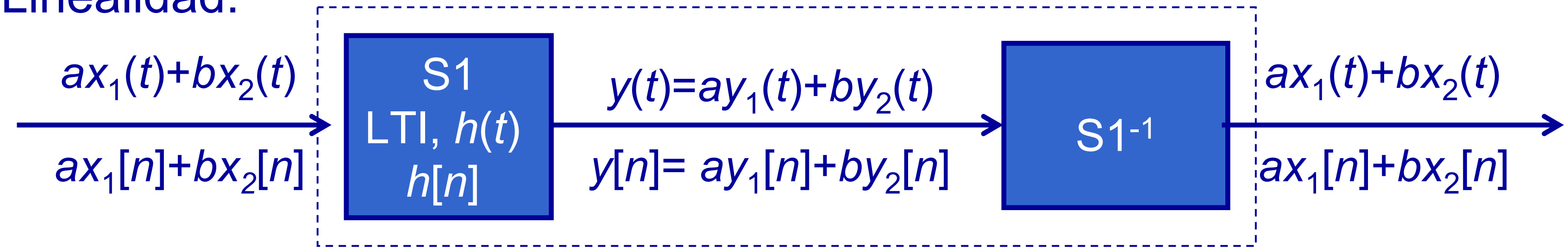
Invertibilidad (I)

Para que un sistema sea invertible debe existir su S^{-1} de modo que asociados en serie el resultado de la asociación sea la identidad:

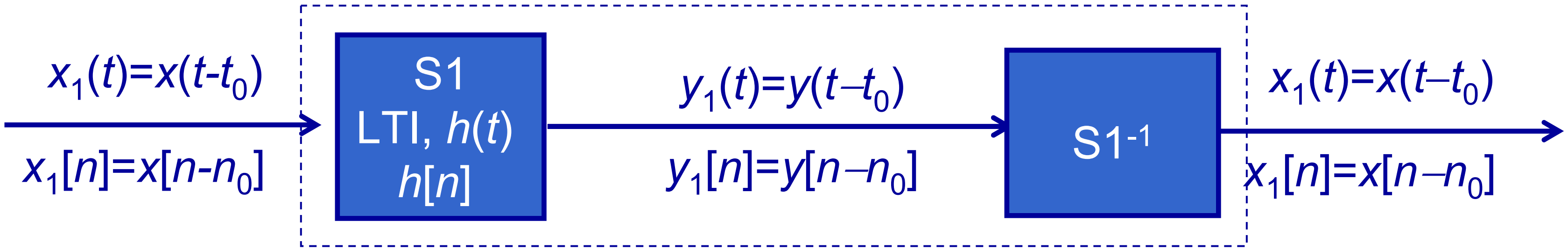


Si S1 es LTI, su inverso, si existe, también debe ser LTI.

- Linealidad:

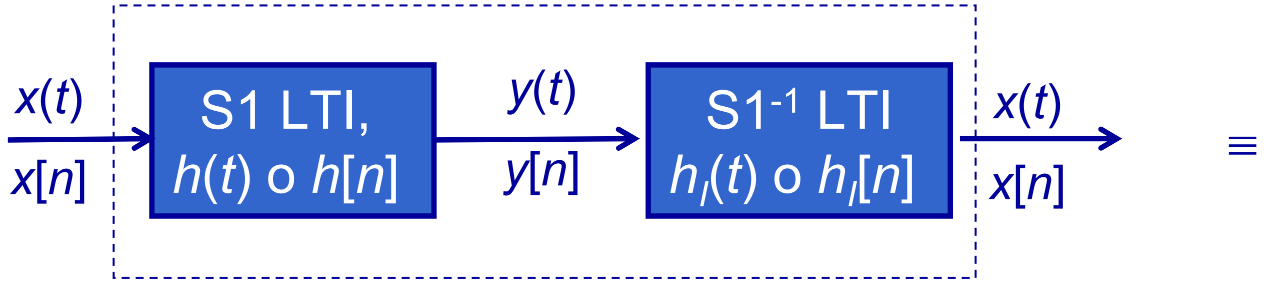


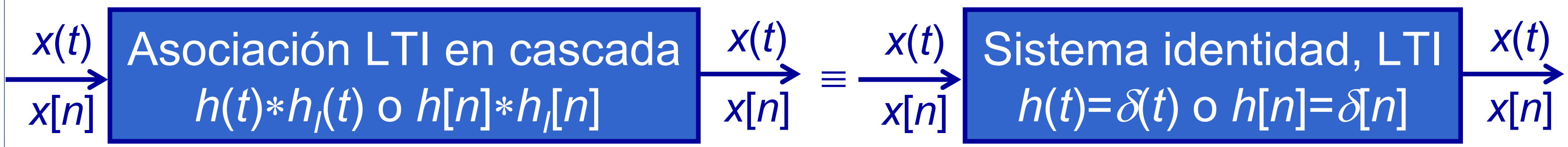
- Invarianza



Invertibilidad (II)

Como el sistema inverso es LTI, puede ser caracterizado por su respuesta al impulso, $h_I(t)$ o $h_I[n]$, y la asociación es equivalente a la identidad (sistema LTI con respuesta al impulso $\delta(t)$ o $\delta[n]$):



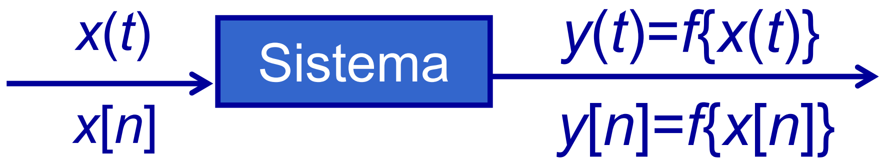


Un sistema LTI es **invertible** $\Leftrightarrow \exists$ otro sistema LTI tal que:

TC: $h(t)*h_I(t)=\delta(t)$ TD: $h[n]*h_I[n]=\delta[n]$

Síntesis

1. Definición de sistema y de sus propiedades:
   Relación entrada salida



   Propiedades
   - Linealidad
   - Invarianza en el tiempo
   - Memoria
   - Causalidad
   - Estabilidad
   - Invertibilidad

2. Sistemas LTI

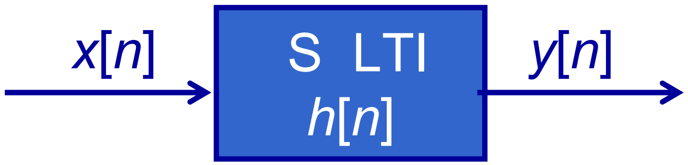
Síntesis

3. Representación de señales:

$$TD:\ x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]$$

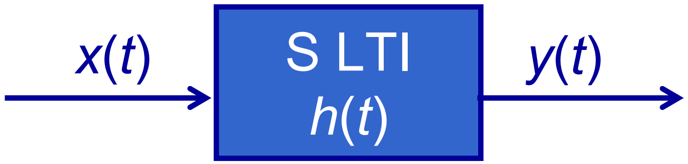
$$TC:\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)$$

4. Sistemas LTI de tiempo discreto:



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

5. Sistemas LTI de tiempo continuo:

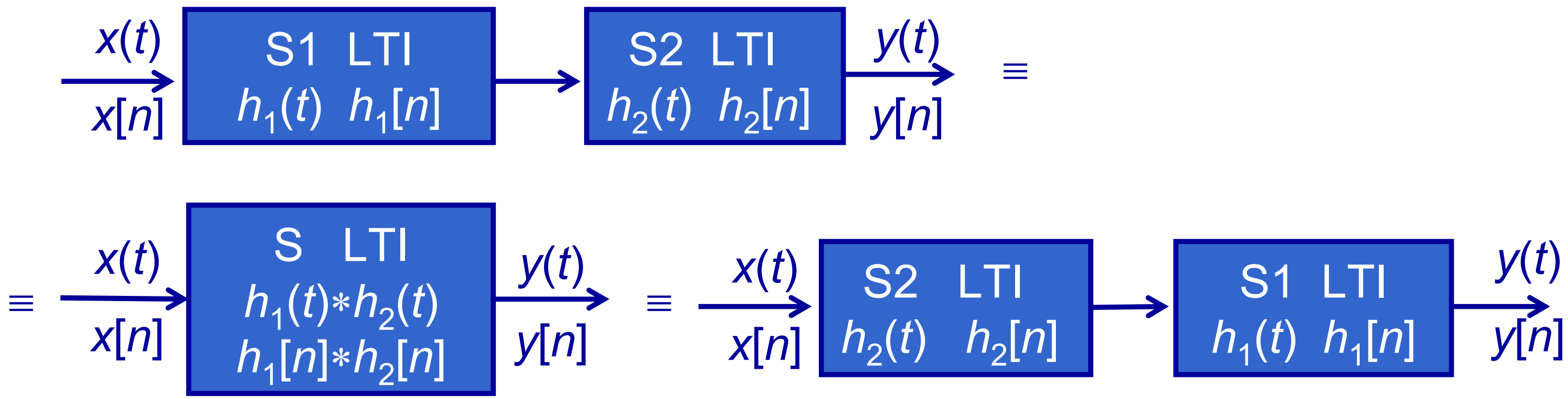


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

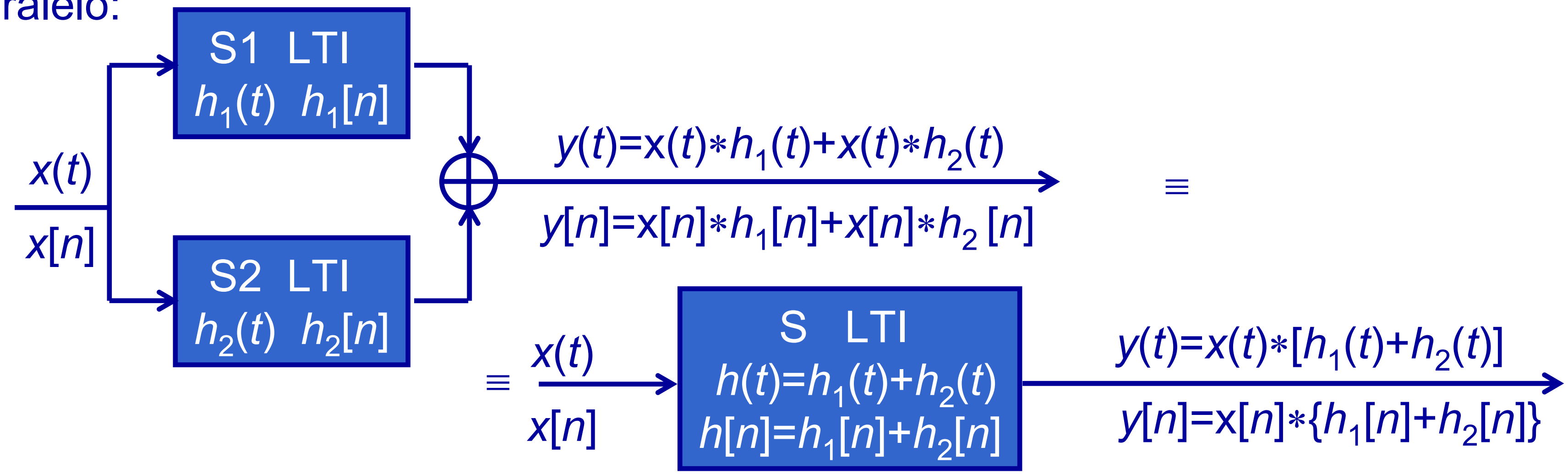
Síntesis

Asociaciones:

Serie:



Paralelo:



Síntesis

6. Propiedades de los sistemas LTI:

Sistema LTI sin memoria $\Leftrightarrow \begin{cases} h[n] = A \cdot \delta[n] \ , & \textit{para TD} \\ h(t) = A \cdot \delta(t) \ , & \textit{para TC} \end{cases}$

Sistema LTI causal $\Leftrightarrow \begin{cases} h[n] = 0 \ , \ \forall \ n < 0 \ , & \textit{para TD} \\ h(t) = 0 \ , \ \forall \ t < 0, & \textit{para TC} \end{cases}$

Sistema LTI estable $\Leftrightarrow \begin{cases} \textit{TC:} \ \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, dt < \infty \\ \textit{TD:} \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \end{cases}$

Sistema LTI invertible $\Leftrightarrow \exists$ otro sistema LTI tal que:

TC: $h(t) * h_I(t) = \delta(t)$

TD: $h[n] * h_I[n] = \delta[n]$