

# Derivación de instrucciones simples

$$\{ A \equiv m = M \wedge n = N \wedge XY = u + mn \}$$

instrucciones a derivar

$$\{ B \equiv m = M \text{ div } 2 \wedge n = 2N \wedge XY = u + mn \}$$

$$\langle m, n \rangle := \langle m \text{ div } 2, 2 * n \rangle$$

$$¿A \Rightarrow pmd(\langle m, n \rangle := \langle m \text{ div } 2, 2 * n \rangle, B)?$$

$$B_{m,n}^{m \text{ div } 2, 2*n} \Leftrightarrow m \text{ div } 2 = M \text{ div } 2 \wedge 2n = 2N \wedge XY = u + (m \text{ div } 2)2n$$

$$m \text{ es par } mn = (m \text{ div } 2)2n \text{ y } A \wedge \text{par}(m) \Rightarrow B_{m,n}^{m \text{ div } 2, 2*n}$$

$$m \text{ no es par } mn = (m \text{ div } 2)2n + n, \text{ luego } XY = u + n + (m \text{ div } 2)2n \text{ y}$$

$$A \wedge \neg \text{par}(m) \Rightarrow B_{m,n,u}^{m \text{ div } 2, 2*n, u+n}$$

$$\{ A \equiv m = M \wedge n = N \wedge XY = u + mn \}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Esquema de derivación de bucles

$\{ \text{Pre. } A \}$   
 $P_0 ;$                      $\{ \text{inicialización} \}$   
 $\{ \text{Inv. } I, \text{ Cota } C \}$   
**mientras  $b$  hacer**  
     $\{ I \wedge b \}$   
         $P_1 ;$              $\{ \text{restablecer} \}$   
     $\{ R \}$   
         $P_2$              $\{ \text{avanzar} \}$   
     $\{ I \}$   
**fmientras**  
 $\{ \text{Post. } B \}$

- 1 Diseñar  $I$  y  $b$  a partir de  $B$  tal que  $I \wedge \neg b \Rightarrow B$ .
- 2 Diseñar  $P_0$  tal que  $\{ A \} P_0 \{ I \}$ .
- 3 Diseñar  $C$  tal que  $I \wedge b \Rightarrow C \geq 0$ .
- 4 Diseñar  $P_2$  y construir  $R \equiv \text{pmd}(P_2, I)$ .
- 5 Diseñar  $P_1$  comparando  $I \wedge b$  con  $R$  y tal que  $\{ I \wedge b \} P_1 \{ R \}$ .
- 6 Comprobar  $\{ I \wedge b \wedge C = z \} P_1 ; P_2 \{ C < z \}$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## División entera

```
{ A ≡ m ≥ 0 ∧ n > 0 }  
fun div-ent(m, n : ent) dev ⟨ q, r : ent ⟩  
{ B ≡ m = n * q + r ∧ 0 ≤ r ∧ r < n }
```

Postcondición **conjuntiva**  $R_1 \wedge R_2$ : una parte como **invariante** y la otra como **negación de la condición del bucle**.

$$\neg b \equiv m = n * q + r \quad I \equiv 0 \leq r \wedge r < n$$

$$\neg b \equiv 0 \leq r \quad I \equiv m = n * q + r \wedge r < n$$

$$\neg b \equiv r < n \quad I \equiv m = n * q + r \wedge 0 \leq r$$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# División entera

Inicialización  $\{ A \} \langle q, r \rangle := \langle 0, m \rangle \{ I \}?$

$$(m = n * q + r \wedge 0 \leq r)_{q,r}^{0,m} \Leftrightarrow m = n * 0 + m \wedge 0 \leq m \\ \Leftrightarrow m \geq 0 \wedge n > 0$$

Función de cota  $C = r \geq 0$

Avanzar  $r := r - 1$

¿Podemos avanzar más rápido?  $r \geq n \longrightarrow r := r - n$

$$R \equiv I_r^{r-n} \Leftrightarrow m = n * q + (r - n) \wedge 0 \leq (r - n) \\ \Leftrightarrow m = n * (q - 1) + r \wedge 0 \leq (r - n) \stackrel{?}{\Leftrightarrow} I \wedge b$$

Restablecer  $\{ I \wedge b \} q := q + 1 \{ R \}?$

$$R_q^{q+1} \Leftrightarrow m = n * (q + 1) + (r - n) \wedge 0 \leq (r - n) \Leftrightarrow I \wedge b$$

Terminación  $\{ I \wedge b \wedge r = z \} q := q + 1; r := r - n \{ r < z \}?$

$$((r < z)_r^{r-n})_q^{q+1} \Leftrightarrow r - n < z \stackrel{?}{\Leftrightarrow} I \wedge b \wedge r = z$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# División entera

```
{ m ≥ 0 ∧ n > 0 }  
⟨ q, r ⟩ := ⟨ 0, m ⟩ ;  
{ m = n * q + r ∧ r ≥ 0 ∧ n > 0 }  
mientras r ≥ n hacer  
    q := q + 1 ;  
    r := r - n  
fmientras  
{ m = n * q + r ∧ 0 ≤ r ∧ r < n }
```

Coste:  $\Theta(m \operatorname{div} n)$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Raíz cuadrada entera

$\{ A \equiv n \geq 0 \}$

**fun** raíz-ent( $n : \text{ent}$ ) **dev**  $r : \text{ent}$

$\{ B \equiv r \geq 0 \wedge r^2 \leq n < (r+1)^2 \}$

Invariante  $r \geq 0 \wedge r^2 \leq n$

Condición bucle  $n \geq (r+1)^2$

Función de cota  $C = n - r^2 \geq 0$

$\{ n \geq 0 \}$

**fun** raíz-ent( $n : \text{ent}$ ) **dev**  $\langle r : \text{ent} \rangle$

$r := 0;$

$\{ r \geq 0 \wedge r^2 \leq n \}$

**mientras**  $n \geq (r+1)^2$  **hacer**

$r := r + 1$

**fmientras**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Potencia

```
{ A ≡ m > 0 ∧ n ≥ 0 }  
fun potencia(m, n : ent) dev r : ent  
{ B ≡ r = m^n }
```

No hay conjunciones. Sustituir constantes (parámetros de entrada) por nuevas variables:

- $r = m^x \wedge x = n$
- $r = y^n \wedge y = m$
- $r = y^x \wedge y = m \wedge x = n$

$$\neg b \equiv r = m^x \quad I \equiv x = n$$

$$\neg b \equiv x = n \quad I \equiv r = m^x$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Potencia

Inicialización  $\langle x, r \rangle := \langle 0, 1 \rangle$

$$(r = m^x)_{x,r}^{0,1} \Leftrightarrow 1 = m^0 \Leftrightarrow \text{cierto}$$

Función de cota  $n - x$ . Añadimos al invariante  $0 \leq x \leq n$ :

$$I \wedge b \Rightarrow n - x \geq 0$$

Avanzar  $x := x + 1$

$$R \equiv I_x^{x+1} \Leftrightarrow r = m^{x+1} \wedge 0 \leq x + 1 \leq n \stackrel{?}{\Leftarrow} I \wedge b$$

Restablecer  $r := m * r$

Terminación  $\{I \wedge b \wedge n - x = z\} r := m * r; x := x + 1 \{n - x < z\}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Potencia

```
{ m > 0 ∧ n ≥ 0 }  
fun potencia(m, n : ent) dev r : ent  
var x : ent  
  ⟨ x, r ⟩ := ⟨ 0, 1 ⟩ ;  
  { I ≡ 0 ≤ x ≤ n ∧ r = mx }  
  mientras (x ≠ n) hacer  
    r := r * m ;  
    x := x + 1  
  fmientras  
ffun  
  { r = mn }
```

Coste:  $\Theta(n)$

## Ejercicio

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Suma de elementos buenos

$\{N \geq 1\}$

**fun** suma-buenos( $X[0..N)$  **de**  $ent$ ) **dev**  $s : ent$

$\{s = (\sum i : 0 \leq i < N \wedge \text{bueno}(i, X) : X[i])\}$

$\text{bueno}(i, X) \equiv (X[i] = 2^i)$

No utilizar ninguna operación que calcule potencias.

$I \equiv s = (\sum i : 0 \leq i < n \wedge \text{bueno}(i, X) : X[i]) \wedge 0 \leq n \leq N$

$b \equiv n \neq N$

Inicialización  $\langle n, s \rangle := \langle 0, 0 \rangle$

Función de cota  $N - n$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Suma de elementos buenos

$$I_n^{n+1} \equiv s = (\sum i : 0 \leq i < n + 1 \wedge \text{bueno}(i, X) : X[i]) \wedge 0 \leq n + 1 \leq N$$

$\stackrel{?}{\Leftarrow} I \wedge b$

La última parte:

$$0 \leq n \leq N \wedge n \neq N \Rightarrow 0 \leq n + 1 \leq N.$$

Para hacer cierta la primera igualdad:

$$s = (\sum i : 0 \leq i < n + 1 \wedge \text{bueno}(i, X) : X[i])$$
$$\Leftrightarrow s = (\sum i : 0 \leq i < n \wedge \text{bueno}(i, X) : X[i]) + \begin{cases} X[n] & \text{si } \text{bueno}(n, X) \\ 0 & \text{si } \neg \text{bueno}(n, X) \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Suma de elementos buenos

$\langle n, s \rangle := \langle 0, 0 \rangle ;$   
 $\{I \equiv s = (\sum i : 0 \leq i < n \wedge \text{bueno}(i, X) : X[i]) \wedge 0 \leq n \leq N\}$   
**mientras**  $n \neq N$  **hacer**  
     $\{I \wedge n \neq N\}$   
    **si**  $\text{bueno}(n, X)$  **entonces**  $s := s + X[n]$  **fsi** ;  
     $\{I_n^{n+1}\}$   
     $n := n + 1$   
**fmientras**

¿Cómo comprobar **eficientemente**  $\text{bueno}(n, X)$ ?

Introducir en el invariante una nueva variable  $p = 2^n$ :

$$\text{bueno}(n, X) \Leftrightarrow X[n] = p$$

Inicialización de la nueva variable:  $n := 1$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Suma de elementos buenos

$\langle n, s, p \rangle := \langle 0, 0, 1 \rangle ;$

$\{I \wedge p = 2^n\}$

**mientras**  $n \neq N$  **hacer**

$\{I \wedge p = 2^n \wedge n \neq N\}$

**si**  $X[n] = p$  **entonces**  $s := s + X[n]$  **fsi** ;

$\{I_n^{n+1} \wedge p = 2^n\}$

~~restablecer~~  $p??$

$\{I_n^{n+1} \wedge p = 2^{n+1}\}$

$n := n + 1$

**fmientras**

$$p = 2^{n+1} \Leftrightarrow p = 2 * 2^n.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Suma de elementos buenos

```
{N ≥ 1}
fun suma-buenos(X[0..N] de ent) dev s : ent
var p, n : ent
    ⟨n, s, p⟩ := ⟨0, 0, 1⟩ ;
    {I ∧ p = 2n}
    mientras n ≠ N hacer
        si X[n] = p entonces s := s + X[n] fsi ;
        p := 2 * p ;
        n := n + 1
    fmientras
ffun
    {s = (∑ i : 0 ≤ i < N ∧ bueno(i, X) : X[i])}
```

Coste:  $\Theta(N)$

Sustituir  $N$  por  $n$  permite realizar un **recorrido del vector de izquierda a derecha**.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Segmento de suma máxima

Dado un vector no vacío de enteros, calcular la suma del segmento no vacío de suma máxima.

Un par  $p, q$  representa el segmento  $[p, q)$ .

$\{N \geq 1\}$

**fun** seg-suma-máx( $X[0..N)$  **de**  $ent$ ) **dev**  $r : ent$

$\{r = (\text{máx } p, q : 0 \leq p < q \leq N : \mathcal{S}(p, q))\}$

$\mathcal{S}(p, q) = (\sum i : p \leq i < q : X[i]).$

$$I \equiv 1 \leq n \leq N \wedge r = (\text{máx } p, q : 0 \leq p < q \leq n : \mathcal{S}(p, q))$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Segmento de suma máxima

Inicialización  $\langle n, r \rangle := \langle 1, X[0] \rangle$

Función de cota  $N - n$

Avanzar  $n := n + 1$

$$1 \leq n \leq N \wedge n \neq N \Rightarrow 1 \leq n + 1 \leq N.$$

$$\begin{aligned} & (\text{máx } p, q : 0 \leq p < q \leq n + 1 : \mathcal{S}(p, q)) \\ = & (\text{máx } p, q : 0 \leq p < q \leq n : \mathcal{S}(p, q)) \\ & \text{máx} \\ & (\text{máx } p : 0 \leq p < n + 1 : \mathcal{S}(p, n + 1)) \\ \stackrel{I}{=} & r \text{ máx } (\text{máx } p : 0 \leq p < n + 1 : \mathcal{S}(p, n + 1)). \end{aligned}$$

Añadimos al invariante esta expresión, pero con  $n$  en vez de  $n + 1$  pues

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cuando  $n = 1$ , se tiene  $S = \mathcal{S}(0, 1) = X[0]$ .



# Segmento de suma máxima

```
var  $r, n, s$  : ent  
 $\langle n, r, s \rangle := \langle 1, X[0], X[0] \rangle$  ;  
mientras  $n \neq N$  hacer  
   $\{I \wedge S \wedge n \neq N\}$   
  restablecer  $s??$   
   $\{I \wedge S_n^{n+1}\}$   
   $r := r \text{ máx } s$  ;  
   $\{I_n^{n+1} \wedge S_n^{n+1}\}$   
   $n := n + 1$   
   $\{I \wedge S\}$   
fmientras
```

Desarrollando la expresión del máximo en  $S_n^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} & (\text{máx } p : 0 \leq p < n + 1 : \mathcal{S}(p, n + 1)) \\ = & (\text{máx } p : 0 \leq p < n : \mathcal{S}(p, n + 1)) \text{ máx } \mathcal{S}(n, n + 1) \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Segmento de suma máxima

$\{N \geq 1\}$

**fun** seg-suma-máx( $X[0..N]$  **de**  $ent$ ) **dev**  $r : ent$

**var**  $r, n, s : ent$

$\langle n, r, s \rangle := \langle 1, X[0], X[0] \rangle ;$

$\{I \wedge S\}$

**mientras**  $n \neq N$  **hacer**

$s := (s + X[n]) \text{ máx } X[n] ;$

$r := r \text{ máx } s ;$

$n := n + 1$

**fmientras**

**ffun**

$\{r = (\text{máx } p, q : 0 \leq p < q \leq N : S(p, q))\}$

Coste:  $\Theta(N)$ .

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Segmento de suma máxima (2)

Devolver el segmento correspondiente (además de la suma).

$\{N \geq 1\}$

**fun** seg-suma-máx( $X[0..N]$  **de**  $ent$ ) **dev**  $\langle r : ent, a, b : 0..N \rangle$

$\{r = (\text{máx } p, q : 0 \leq p < q \leq N : \mathcal{S}(p, q)) \wedge 0 \leq a < b \leq N \wedge r = \mathcal{S}(a, b)\}$

Enriquecemos el invariante:

$$I \equiv 1 \leq n \leq N \wedge r = (\text{máx } p, q : 0 \leq p < q \leq n : \mathcal{S}(p, q)) \\ \wedge 0 \leq a < b \leq n \wedge r = \mathcal{S}(a, b)$$

Añadimos la inicialización:  $\langle a, b \rangle := \langle 0, 1 \rangle$ .

¿Cómo afecta la actualización de  $r$  a  $a$  y  $b$ ?

Variable  $c$ : misma información con respecto a  $s$  que  $a, b$  con respecto a  $r$ .

Añadimos al invariante

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Segmento de suma máxima (2)

¿Cómo restablecer  $a$  y  $b$ ?

**mientras**  $n \neq N$  **hacer**

$\{I \wedge S \wedge R \wedge n \neq N\}$

$s := (s + X[n]) \text{ máx } X[n];$

**restablecer**  $c??$

$\{I \wedge S_n^{n+1} \wedge R_n^{n+1}\}$

**si**  $r < s$  **entonces**  $\langle r, a, b \rangle := \langle s, c, n + 1 \rangle$  **fsi** ;

$n := n + 1$

**fmientras**

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Segmento de suma máxima (2)

$\{N \geq 1\}$

**fun** seg-suma-máx( $X[0..N]$  **de**  $ent$ ) **dev**  $\langle r : ent, a, b : nat \rangle$

**var**  $n, s, c : ent$

$\langle n, r, a, b, s, c \rangle := \langle 1, X[0], 0, 1, X[0], 0 \rangle ;$

**mientras**  $n \neq N$  **hacer**

$\{I \wedge S \wedge R \wedge n \neq N\}$

**si**  $s \geq 0$  **entonces**  $s := s + X[n]$

**si no**  $\langle s, c \rangle := \langle X[n], n \rangle$

**fsi ;**

$\{I \wedge S_n^{n+1} \wedge R_n^{n+1}\}$

**si**  $r < s$  **entonces**  $\langle r, a, b \rangle := \langle s, c, n + 1 \rangle$  **fsi ;**

$n := n + 1$

**fmientras**

$\{r = (\text{máx } p, q : 0 \leq p < q \leq N : S(p, q)) \wedge 0 \leq a < b \leq N \wedge r = S(a, b)\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Raíz cuadrada entera de  $n$ : “buscar el mayor natural  $i$  tal que  $i^2 \leq n$ ”

$$r = (\text{máx } i : 0 \leq i \wedge i^2 \leq n : i)$$

O también:

$$r = (\text{mín } i : 0 \leq i \wedge (i + 1)^2 > n : i)$$

es decir, buscamos el **menor** natural  $i$  tal que  $(i + 1)^2 > n$ .

- Búsqueda lineal
- Búsqueda lineal acotada
- Búsqueda binaria

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Búsqueda lineal (de menor a mayor)

Encontrar el **primer elemento que cumpla una propiedad  $P(i)$**  a partir de una cota inferior  $c_{inf}$ , y sabemos que existe.

$$\{ (\exists i : i \geq c_{inf} : P(i)) \}$$

**fun** búsqueda-lineal(...) **dev**  $x : ent$

$$\{ x = (\text{mín } i : i \geq c_{inf} \wedge P(i) : i) \}$$

Otra forma de expresar la postcondición es

$$x \geq c_{inf} \wedge P(x) \wedge (\forall i : c_{inf} \leq i < x : \neg P(i))$$

Invariante  $I \equiv x \geq c_{inf} \wedge (\forall i : c_{inf} \leq i < x : \neg P(i))$

Condición del bucle  $\neg b \equiv P(x)$

Inicialización  $x := c_{inf}$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Búsqueda lineal (de menor a mayor)

```
{ (∃i : i ≥ cinf : P(i)) }  
fun búsqueda-lineal(...) dev x : ent  
  x := cinf ;  
  mientras ¬P(x) hacer  
    x := x + 1  
  fmientras  
ffun  
{ x = (mín i : i ≥ cinf ∧ P(i) : i) }
```

## Terminación

$$I \Rightarrow (\forall i : i \geq c_{inf} \wedge P(i) : i \geq x)$$

Por la precondition, existe un  $M$  tal que  $M \geq c_{inf} \wedge P(M)$ .

$$I \Rightarrow M \geq x \Leftrightarrow M - x \geq 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



## Búsqueda lineal acotada

Dado un vector de booleanos  $B[0..N)$ , con  $N \geq 0$ , devolver en  $x$  el menor valor  $i$ , con  $0 \leq i < N$ , tal que  $B[i]$  sea cierto (ÉXITO).

Si no existe,  $x$  debe valer  $N$  (FALLO).

$\{ N \geq 0 \}$

**fun** búsqueda-lineal-acotada( $B[0..N)$  **de** *bool*) **dev**  $x : \text{ent}$

$\{ (x = N \wedge (\forall i : 0 \leq i < N : \neg B[i])) \vee_c x = (\text{mín } i : 0 \leq i < N \wedge B[i] : i) \}$

Reescribir la postcondición como

$$0 \leq x \leq N \wedge (\forall i : 0 \leq i < x : \neg B[i]) \wedge P(x)$$

$$P(x) = (0 \leq x < N \wedge_c B[x]) \vee (x = N)$$

$N$  es el **centinela**;  $B[N]$  no puede ser accedido

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Búsqueda lineal acotada

Invariante  $I \equiv 0 \leq x \leq N \wedge (\forall j : 0 \leq j < x : \neg B[j])$ .

Condición del bucle  $\neg P(x) \Leftrightarrow x \neq N \wedge_c \neg B[x]$ .

Inicialización  $x := 0$

Función de cota  $N - x$

Avanzar  $x := x + 1$

$$\begin{aligned} I_x^{x+1} &\Leftrightarrow 0 \leq x + 1 \leq N \wedge (\forall j : 0 \leq j < x + 1 : \neg B[j]) \\ &\Leftarrow I \wedge (x \neq N \wedge_c \neg B[x]) \end{aligned}$$

$\{ N \geq 0 \}$

$x := 0 ;$

$\{ I \equiv 0 \leq x \leq N \wedge (\forall j : 0 \leq j < x : \neg B[j]) \}$

**mientras**  $(x \neq N \wedge_c \neg B[x])$  **hacer**

$x := x + 1$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Búsqueda lineal acotada: otra posibilidad

Invariante  $I \equiv 0 \leq x \leq y \leq N \wedge (\forall j : 0 \leq j < x : \neg B[j]) \wedge P(y)$

Condición del bucle  $x \neq y$

Inicialización  $\langle x, y \rangle := \langle 0, N \rangle$

Función de cota  $y - x$

Avanzar  $x := x + 1$

$$\begin{aligned} I_x^{x+1} &\Leftrightarrow 0 \leq x + 1 \leq y \leq N \wedge (\forall j : 0 \leq j < x + 1 : \neg B[j]) \wedge P(y) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x + 1 \leq y \leq N \wedge (\forall j : 0 \leq j < x : \neg B[j]) \wedge \neg B[x] \wedge P(y) \end{aligned}$$

$$\stackrel{?}{\Leftarrow} I \wedge x \neq y$$

Solo si  $\neg B[x]$

Restablecer si  $\neg B[x]$  entonces  $x := x + 1$  si no  $y := x$  fsi

$\{ N \geq 0 \}$

$\langle x, y \rangle := \langle 0, N \rangle ;$

$\{ I \equiv 0 \leq x \leq y \leq N \wedge (\forall j : 0 \leq j < x : \neg B[j]) \wedge P(y) \}$

mientras  $(x \neq y)$  hacer

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Ejemplo

En un vector de enteros un índice es *gordote* si el valor del vector en dicha posición es igual a la suma de los valores de todas las posiciones que le siguen. Determinar el mayor índice *gordote* de un vector de enteros  $V[1..N]$ , con  $N \geq 0$ . En caso de no existir ningún índice *gordote* el resultado debe ser 0.

$\{ N \geq 0 \}$

**fun** gordote( $V[1..N]$  **de** ent) **dev**  $x : nat$

$\{ (x = 0 \wedge (\forall i : 1 \leq i \leq N : \neg \text{gordote}(V, i))) \}$

$\forall_c x = (\text{máx } i : 1 \leq i \leq N \wedge \text{gordote}(V, i) : i) \}$

$\text{gordote}(V, j) \equiv (V[j] = (\sum k : j + 1 \leq k \leq N : V[k]))$

Simétrico al esquema de búsqueda lineal acotada:

$P(x) \equiv (x = 0) \vee (0 < x \leq N \wedge_c \text{gordote}(V, x))$

$\langle x, y \rangle := \langle N, 0 \rangle ;$

$\{ I \equiv (\forall j : x + 1 \leq j \leq N : \neg \text{gordote}(V, j)) \wedge P(y) \wedge 0 \leq y \leq x \leq N \}$

**mientras**  $(x \neq 0)$  **hacer**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

¿Comprobación eficiente de  $gordote(V, x)$ ?

Introducir una variable  $S \equiv s = (\sum k : x + 1 \leq k \leq N : V[k])$ .

Comprobar  $V[x] = s$ .

Inicialización  $s := 0$

Restablecer  $I \wedge S \wedge (x \neq y) \wedge (V[x] \neq s) \Rightarrow ((I \wedge S)_x^{x-1})_s^{s+V[x]}$

$\{ N \geq 0 \}$

**fun** gordote( $V[1..N]$  **de** ent) **dev**  $x : nat$

**var**  $y, s : ent$

$\langle x, y, s \rangle := \langle N, 0, 0 \rangle ;$

$\{ I \wedge S \}$

**mientras**  $(x \neq y)$  **hacer**

**si**  $V[x] \neq s$  **entonces**  $s + V[x] ; x := x - 1$  **si no**  $y := x$  **fsi**

**fmientras**

**ffun**

$\{(x = 0 \wedge (\forall i : 1 \leq i \leq N : \neg gordote(V, j)))\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Búsqueda binaria

$$\{ N \geq 1 \wedge f(0) \leq A < f(N) \}$$

**fun** búsqueda-binaria( $A : \text{ent} \dots$ ) **dev**  $x : \text{ent}$

$$\{ f(x) \leq A < f(x+1) \wedge 0 \leq x < N \}$$

Introducimos una nueva variable:  $f(x) \leq A < f(y) \wedge y = x + 1$

Invariante  $I \equiv f(x) \leq A < f(y) \wedge 0 \leq x < N \wedge x < y \leq N$

Condición del bucle  $b \equiv y \neq x + 1$  **hay un valor entre  $x$  e  $y$**

Inicialización  $\langle x, y \rangle := \langle 0, N \rangle$

Función de cota  $y - x$

Avanzar Elegimos  $h$  tal que  $x < h < y$

$$I_x^h \Leftrightarrow f(h) \leq A < f(y) \wedge 0 \leq h < N \wedge h < y \leq N \stackrel{?}{\Leftarrow} I \wedge b$$

$$I_y^h \Leftrightarrow f(x) \leq A < f(h) \wedge 0 \leq x < N \wedge x < h \leq N \stackrel{?}{\Leftarrow} I \wedge b$$

**casos**

$$f(h) < A \Rightarrow x := h$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Búsqueda binaria

```
{  $N \geq 1 \wedge f(0) \leq A < f(N)$  }  
fun búsqueda-binaria( $A : ent...$ ) dev  $x : ent$   
var  $y, h : ent$   
   $\langle x, y \rangle := \langle 0, N \rangle ;$   
  {  $I \equiv f(x) \leq A < f(y) \wedge 0 \leq x < N \wedge x < y \leq N$  }  
  mientras  $y \neq x + 1$  hacer  
     $h := (x + y) \text{ div } 2 ;$   
    casos  
       $f(h) \leq A \rightarrow x := h$   
       $\square f(h) > A \rightarrow y := h$   
    fcasos  
  fmientras  
ffun  
{  $f(x) \leq A < f(x + 1) \wedge 0 \leq x < N$  }
```

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Ejemplo: raíz cuadrada entera

$\{ n \geq 0 \}$

**fun** raíz-ent-log( $n : \text{ent}$ ) **dev**  $r : \text{ent}$

$\{ r \geq 0 \wedge r^2 \leq n < (r + 1)^2 \}$

$$f(x) = x^2$$

$$n \geq 0 \Rightarrow 0^2 \leq n < (n + 1)^2$$

**fun** raíz-ent-log( $n : \text{ent}$ ) **dev**  $r : \text{ent}$      $\{ \Theta(\log n) \}$

**var**  $y, h : \text{ent}$

$\langle r, y \rangle := \langle 0, n + 1 \rangle ;$

**mientras**  $y \neq r + 1$  **hacer**

$h := (r + y) \text{ div } 2 ;$

**si**  $h * h \leq n$  **entonces**  $r := h$

**si no**  $y := h$

**fsi**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## Buscar un elemento en un vector ordenado

En el algoritmo búsqueda-binaria  $0 < h < N \Rightarrow f(0)$  y  $f(N)$  no se consultan

La precondition se utiliza solo para inicializar  $x$  e  $y$ .

Relajamos en la precondition

$$f(0) \leq A < f(N) \vee f(0) > A \vee f(N) \leq A$$

Y la postcondición sería

$$0 \leq x < N \wedge (f(x) \leq A < f(x+1) \vee f(0) > A \vee f(N) \leq A)$$

## Buscar un elemento en un vector ordenado

$\{ N \geq 1 \wedge (\forall i, j : 0 \leq i \leq j < N : V[i] \leq V[j]) \}$

**fun** está?( $V[0..N]$  **de**  $ent, A : ent$ ) **dev**  $r : bool$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Buscar un elemento en un vector ordenado

$$f(x) = \begin{cases} V[x] & \text{si } 0 \leq x < N \\ \infty & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

La postcondición se simplifica:

$$0 \leq x < N \wedge (V[x] \leq A < V[x+1] \vee V[0] > A)$$

Si se cumple la postcondición y además **el vector está ordenado**:

$$(\exists i : 0 \leq i < N : V[i] = A) \Leftrightarrow (V[x] = A)$$

**fun** está?( $V[0..N]$  **de**  $ent, A : ent$ ) **dev**  $r : bool$      $\{ \Theta(\log n) \}$

**var**  $x, y, h : ent$

$\langle x, y \rangle := \langle 0, N \rangle ;$

**mientras**  $y \neq x + 1$  **hacer**

$h := (x + y) \text{ div } 2 ;$

**casos**

$V[h] \leq A \rightarrow x := h$

$\square V[h] > A \rightarrow y := h$

**fcasos**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Manipulación de vectores mediante intercambios

Muchos problemas se resuelven intercambiando posiciones de un vector.

$$\left. \begin{array}{l} aux := v[i] ; \\ v[i] := v[j] ; \\ v[j] := aux \end{array} \right\} \text{intercambiar}(v, i, j)$$

Extendemos la notación de  $\text{asig}(v, x, y, X, Y)[i] = \begin{cases} v[i] & \text{si } i \neq x \wedge i \neq y \\ X & \text{si } i = x \\ Y & \text{si } i = y \end{cases}$

$$\frac{P \Rightarrow \text{def}(\text{asig}(v, i, j, v[i], v[j])) \wedge Q_v^{\text{asig}(v, i, j, v[i], v[j])}}{\{P\} \text{intercambiar}(v, i, j) \{Q\}}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## La bandera holandesa



$$\{ N \geq 0 \wedge v = V \}$$

**proc** bandera(**E/S**  $v[0..N]$  **de**  $\{A, B, R\}$ )

$$\{ v \in \text{Perm}(V) \wedge (\exists p, q : 0 \leq p \leq q \leq N : (\forall i : 0 \leq i < p : v[i] = R) \\ \wedge (\forall j : p \leq j < q : v[j] = B) \\ \wedge (\forall k : q \leq k < N : v[k] = A)) \}$$

Solo se permiten operaciones de **intercambio** en el vector.

**Invariante**  $I \equiv v \in \text{Perm}(V) \wedge P_r \wedge P_b \wedge P_a \wedge 0 \leq r \leq b \leq a \leq N$

$$P_r \equiv (\forall i : 0 \leq i < r : v[i] = R)$$

$$P_b \equiv (\forall j : r \leq j < b : v[j] = B)$$

$$P_a \equiv (\forall k : a \leq k < N : v[k] = A)$$

Entre  $b$  y  $a - 1$  aún no se han procesado los elementos del vector.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# La bandera holandesa

Avanzar consultamos  $v[b]$ :

$\langle r, b, a \rangle := \langle 0, 0, N \rangle ;$

**mientras**  $(b \neq a)$  **hacer**

**casos**

$v[b] = R \rightarrow S_r$

$\square v[b] = B \rightarrow S_b$

$\square v[b] = A \rightarrow S_a$

**fcasos**

**fmientras**

$S_b$  avanzar  $b: I \wedge v[b] = B \Rightarrow I_b^{b+1}$

$S_a$  intercambiar  $v[b]$  y  $v[a - 1]$  para colocar un azul más:

$\{I \wedge (b \neq a) \wedge (v[b] = A)\}$

intercambiar( $v, b, a - 1$ );

$\{v \in \text{Dom}(V) \wedge D \wedge D \wedge D \wedge 0 < r < b < a < N \wedge (v[a - 1] = A)\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# La bandera holandesa

$S_r$  a partir de  $P_b$  sabemos que:

- $r < b \Rightarrow v[r] = B$

Intercambiando  $v[r]$  con  $v[b]$  colocaremos un rojo y un blanco más:

$$\{I \wedge (b \neq a) \wedge (v[b] = R) \wedge (r < b) \wedge (v[r] = B)\}$$

intercambiar( $v, b, r$ );

$$\{v \in \text{Perm}(V) \wedge P_r \wedge (\forall i: r+1 \leq i < b: v[i] = B) \wedge P_a \wedge \\ (v[r] = R) \wedge 0 \leq r < b < a \leq N \wedge (v[b] = B)\}$$

$$\langle r, b \rangle := \langle r+1, b+1 \rangle$$

$$\{I\}$$

- $r = b \Rightarrow$  **no hay blancos colocados de momento**

Tendremos solamente colocado un rojo más.

Un intercambio entre  $v[r]$  con  $v[b]$  no afecta al vector y evitamos una distinción de casos:

$$\{I \wedge (b \neq a) \wedge (v[b] = R) \wedge (r = b)\}$$

intercambiar( $v, b, r$ )

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# La bandera holandesa

$\{ N \geq 0 \wedge v = V \}$

**proc** bandera(**E/S**  $v[0..N]$  **de**  $\{A, B, R\}$ )

**var**  $r, b, a : \text{ent}$

$\langle r, b, a \rangle := \langle 0, 0, N \rangle ;$

$\{ I \equiv P_r \wedge P_b \wedge P_a \wedge 0 \leq r \leq b \leq a \leq N \}$

**mientras**  $(b \neq a)$  **hacer**

**casos**

$v[b] = R \rightarrow \text{intercambiar}(v, b, r) ; \langle r, b \rangle := \langle r + 1, b + 1 \rangle$

$\square v[b] = B \rightarrow b := b + 1$

$\square v[b] = A \rightarrow \text{intercambiar}(v, b, a - 1) ; a := a - 1$

**fcasos**

**fmientras**

**ffun**

$\{ v \in \text{Perm}(V) \wedge (\exists p, q : 0 \leq p \leq q \leq N : (\forall i : 0 \leq i < p : v[i] = R)$

$\wedge (\forall j : p \leq j < q : v[j] = B)$

$\wedge (\forall k : q < k < N : v[k] = A)) \}$

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## Algoritmo de partición

Recolocar los elementos de un vector de forma que primero aparezcan los menores que el valor de la primera posición, a continuación los iguales y por último los mayores.

$$\{ N > 0 \wedge v = V \}$$

**proc** partición(**E/S**  $v[0..N]$  **de** *ent*)

$$\{ v \in \text{Perm}(V) \wedge (\exists p, q : 0 \leq p \leq q \leq N : (\forall i : 0 \leq i < p : v[i] < V[0]) \\ \wedge (\forall j : p \leq j < q : v[j] = V[0]) \\ \wedge (\forall k : q \leq k < N : v[k] > V[0])) \}$$

Cambiar en el algoritmo anterior las condiciones por  $v[b] < V[0]$ ,  $v[b] = V[0]$  y  $v[b] > V[0]$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Algoritmo de partición

$\{ N > 0 \wedge v = V \}$

**proc** partición(**E/S**  $v[0..N]$  **de**  $ent$ )

**var**  $pivote, r, b, a : ent$

$\langle pivote, r, b, a \rangle := \langle v[0], 0, 0, N \rangle ;$

**mientras**  $(b \neq a)$  **hacer**

**casos**

$v[b] < pivote \rightarrow$  intercambiar( $v, b, r$ ) ;  $\langle r, b \rangle := \langle r + 1, b + 1 \rangle$

$\square v[b] = pivote \rightarrow b := b + 1$

$\square v[b] > pivote \rightarrow$  intercambiar( $v, b, a - 1$ ) ;  $a := a - 1$

**fcasos**

**fmientras**

**ffun**

$\{ v \in Perm(V) \wedge (\exists p, q : 0 \leq p \leq q \leq N : (\forall i : 0 \leq i < p : v[i] < V[0])$   
 $\wedge (\forall j : p \leq j < q : v[j] = V[0])$   
 $\wedge (\forall k : q \leq k < N : v[k] > V[0])) \}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70