

Comunicación de datos

Curso 2016/17, Problemas # 4

1. Dados dos vectores binarios de longitud n , $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_n$, se define su intersección como el vector cuyo elemento i -ésimo vale 1 si y sólo si \mathbf{x} e \mathbf{y} tienen simultáneamente un 1 en la posición i :

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{y} \triangleq (x_1y_1, \dots, x_ny_n).$$

Demuestre la igualdad

$$p_H(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = p_H(\mathbf{x}) + p_H(\mathbf{y}) - 2p_H(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}).$$

Utilizando esta igualdad, pruebe que en un código lineal:

- a) La suma de dos palabras del código de peso par es otra palabra del código de peso par y el subconjunto de palabras del código de peso par es un código lineal.
 - b) La suma de dos palabras del código de peso impar es una palabra del código de peso par.
 - c) La suma de una palabra del código de peso par con una palabra del código de peso impar produce una palabra del código de peso impar.
 - d) O bien todas las palabras del código son de peso par o bien la mitad son de peso par y la otra mitad son de peso impar. Como corolario, pruebe que el subconjunto de palabras del código de peso par es un código lineal $[n, k]$ o $[n, k - 1]$.
 - e) O bien todas las palabras del código tienen un 0 en la coordenada $1 \leq j \leq n$ o bien la mitad tienen un 1 y la otra mitad un 0. Como corolario de esta proposición, pruebe que el subconjunto de palabras del código con un 0 en la coordenada j o bien es un código lineal $[n, k]$ o bien es un código lineal $[n, k - 1]$.
 - f) La distancia entre dos palabras del mismo peso es par.
2. La matriz de comprobación de paridad de un código lineal binario es

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule la distancia del código.
 - b) Construya una tabla de decodificación por síndrome.
3. Sea H la matriz de comprobación de paridad de un código Hamming binario $[15, 11]$. Considérese el código lineal \mathcal{C} cuya matriz de comprobación de paridad es la obtenida al eliminar de H todas las columnas con un número par de unos. Sin escribir las palabras de \mathcal{C} :
- a) Indique los parámetros del código y muestre que su distancia es 4.
 - b) Demuestre que todas las palabras del código no nulas tienen un número par de unos.
 - c) ¿Cuántos errores de peso Hamming 4 son detectables? ¿Cuál es la probabilidad de no detectar



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

8. Considere el código lineal binario \mathcal{C} con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{pmatrix}$$

en donde H_4 es matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario [15, 11].

- Indique la longitud, la dimensión y la distancia de \mathcal{C} .
- Demuestre que \mathcal{C} sólo puede corregir errores simples y dobles. ¿Cuántos dobles?
- La distribución de pesos del código Hamming es $A_0 = A_{15} = 1$, $A_3 = A_{12} = 35$, $A_4 = A_{11} = 105$, $A_5 = A_{10} = 168$, $A_6 = A_9 = 280$, $A_7 = A_8 = 435$. La distribución de pesos de \mathcal{C} viene dada por la fórmula $B_i = \sum_{j=0}^i A_j A_{i-j}$. Calcule el número de palabras de peso mínimo de \mathcal{C} .

9. Considere la colección \mathcal{C}_r de códigos lineales binarios definidos por matrices de comprobación de paridad de la forma

$$H_r = (I_r \quad B_{r \times m}) \quad r \geq 2$$

en donde I_r es la matriz identidad $r \times r$ y $B_{r \times m}$ es una matriz que tiene por columnas vectores distintos de peso 2 de forma que ninguna de sus filas es nula.

- ¿Cuáles son la longitud y la dimensión mínimas de un código de la familia \mathcal{C}_r ? ¿Cuáles la longitud y la dimensión máximas? Indique qué matrices corresponden a cada caso.
- La distancia de cualquiera de los códigos de \mathcal{C}_r es 3. Calcule el número de palabras de peso 3 del código de longitud máxima. Ídem para uno cualquiera de los de longitud mínima.

10. Se define la sucesión de matrices

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_m = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & \mathcal{H}_{m-1} & & \overline{\mathcal{H}}_{m-1} & & \end{pmatrix}$$

en donde $\overline{\mathcal{H}}_{m-1}$ es la matriz complementaria de \mathcal{H}_{m-1} ($0 \mapsto 1$ y $1 \mapsto 0$). Considérese la matriz \mathcal{H}_m como matriz de comprobación de paridad de un código lineal binario \mathcal{D}_m , para cualquier $m \geq 2$.

- Indique razonadamente la longitud y dimensión de \mathcal{D}_m .
- Explique: para $m \geq 2$, todos los códigos \mathcal{D}_m tienen la misma distancia. Calcúlela.
- Demuestre que la tabla de síndromes de estos códigos \mathcal{D}_m sólo contiene vectores de peso menor o igual que dos. ¿Cuántos errores simples y dobles se pueden corregir?
- Muestre que si \mathbf{u} y \mathbf{v} son palabras de \mathcal{D}_{m-1} entonces el vector (\mathbf{u}, \mathbf{v}) que se forma concatenando ambas es una palabra del código \mathcal{D}_m . Use la igualdad $\mathbf{x}\overline{P} = \mathbf{x}(P + J)$, donde J es una matriz binaria con todos sus elementos iguales a 1, válida para todos los vectores \mathbf{x} y matrices P binarias de las dimensiones apropiadas.
- Deduzca del apartado anterior que, si $\{B_i\}$ es la distribución de pesos de \mathcal{D}_m y $\{A_i\}$ es la de \mathcal{D}_{m-1} entonces $B_i \geq \sum_j A_j A_{i-j}$.

11. Considere el código lineal binario \mathcal{C} con matriz de comprobación de paridad

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



12. El código Hamming binario extendido $\overline{\mathcal{H}}_r$ es el de matriz de comprobación de paridad

$$\overline{H}_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 0 \\ & & & H_r & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad r \geq 2$$

en donde H_r denota la matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario con r símbolos de redundancia. $\overline{\mathcal{H}}_r$ se obtiene añadiendo a las palabras un símbolo de paridad par.

- ¿Qué longitud, dimensión y distancia tiene $\overline{\mathcal{H}}_r$?
- Deduzca que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2^r$ y $\alpha_2 = 2^r - 1$ es la distribución de pesos de los errores corregibles.
- Muestre que $\mathbf{1} \in \overline{\mathcal{H}}_r$.
- Escriba explícitamente la matriz \overline{H}_3 y úsela para decodificar el vector 1110...0.

13. Para cualquier $r > 3$, sea H_r la matriz de comprobación de paridad de un código Hamming binario con r bits de redundancia. Considérense las matrices $H_{r,\text{par}}$ y $H_{r,\text{impar}}$ formadas, respectivamente, por las columnas de peso par (impar) de H_r como las de comprobación de paridad de dos nuevos códigos, \mathcal{P}_r e \mathcal{I}_r .

- Indique razonadamente la longitud, dimensión y distancia de \mathcal{P}_r e \mathcal{I}_r .
- ¿Puede \mathcal{P}_r corregir algún error doble? ¿Puede \mathcal{I}_r corregir algún error doble?
- ¿Cuántas palabras de peso 3 tiene \mathcal{P}_r ? ¿Cuántas palabras de peso 3 tiene \mathcal{I}_r ?

14. Si H_r denota la matriz de comprobación de paridad de un código Hamming binario $[2^r - 1, 2^r - r - 1]$, considérense los códigos con matriz de comprobación

$$T_{2r+1} = \begin{pmatrix} & H_r & & & & & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & & & H_r \end{pmatrix}.$$

- Obtenga la longitud, dimensión y distancia del código correspondiente a T_{2r+1} .
- Sean $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ vectores binarios no simultáneamente nulos de longitud r . Muestre que el síndrome $(\mathbf{s}_1, 0, \mathbf{s}_2)$ es la suma de dos columnas de T_{2r+1} . Si estos son los únicos síndromes correspondientes a errores dobles corregibles, ¿cuántos hay?
- ¿Es 11...1 (para la longitud apropiada) una palabra de estos códigos?

15. Sean I_m la matriz identidad de orden m y J_m la matriz $m \times m$ con todos los elementos iguales a uno. Considere el código binario con matriz de comprobación de paridad

$$H_m = (I_m \quad J_m + I_m).$$

Por ejemplo, para $m = 4$

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70