Comunicación de datos
Curso 2016/17, Problemas # 5

1. Analice el código cíclico binario $\mathcal{D}[15,6]$ engendrado por $g(x) = (x-1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)$.

a) Calcule $(x^{15}-1)/g(x)$.

b) El polinomio x^4+x+1 es primitivo y el código no contiene vectores de peso 4. Aplique las propiedades necesarias y deduzca que la distancia es 6.

c) Decodifique los siguientes vectores recibidos:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{13}+x^7+x^5+x^4+x+1 \\ y_2(x) &= x^{14}+x^{11}+x^{10}+x^8+x^2+x \\ y_3(x) &= x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^4+x^3+x+1 \end{aligned}$$

No construya la tabla de decodificación por síndrome: tiene 2^9 entradas. Mejor utilice el hecho de que el código corrige todos los errores dobles.

2. El polinomio $g(x) = x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1$ genera un código cíclico $[23,12]$ perfecto de distancia 7.

a) Estime el vector código transmitido si se reciben los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{13}+x^8+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1 \\ y_2(x) &= x^{16}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^3+x+1 \\ y_3(x) &= x^{18}+x^{16}+x^{14}+x^{13}+x^{11}+x^{10}+x^6+x^2+x \end{aligned}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de error de decodificación en un canal binario simétrico con $p = 0{,}01$? ¿Cuál sería, en el mismo canal, la de un sistema sin codificación?

3. Sea el menor código cíclico engendrado por el polinomio $g(x) = (x-1)(x^7+x+1)$, donde x^7+x+1 es primitivo.

a) Se nos dice que la distancia es 4. ¿Es esto cierto? ¿Por qué?

b) Obtenga la salida del decodificador si se reciben los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{21}+x^{20}+x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1 \\ y_2(x) &= x^7+x^2+1 \end{aligned}$$

c) Enumere las propiedades de detección de errores que conozca para este código.

4. Analice el código cíclico binario $\mathcal{D}[15,7]$ engendrado por $g(x) = (x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

a) El factor x^4+x+1 es primitivo y el código $\mathcal{C}[15,11]$ generado por $x^4+x^3+x^2+x+1$ no contiene palabras de peso 3. ¿Cuál es la distancia de $\mathcal{D}$?

b) Obtenga una matriz generadora sistemática para $\mathcal{D}$.

c) Suponga que se utiliza una codificación sistemática para formar las palabras del código. Demuestre que cualquier patrón de errores que afecte únicamente a los bits de redundancia es detectable.

d) Decodifique los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^6+x^4+x^3+1 \\ y_2(x) &= x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^9+x^8+x^5+x^4+x^3+x^2+1 \\ y_3(x) &= x^9+x^7+x^5+x \end{aligned}$$

5. Escriba una matriz generadora sistemática y una matriz de comprobación de paridad del código cíclico $[17, 8]$ generado por $(x-1)(x^8+x^5+x^4+x^3+1)$.

6. Sabiendo que x^7+x^3+1 es un polinomio primitivo,

a) Enuncie las propiedades de detección de errores del menor código cíclico generado por $g(x) = (x-1)(x^7+x^3+1)$.

b) ¿Es capaz este código de corregir los errores simples? ¿Y los errores dobles?

7. Sea $\mathcal{C}$ el código cíclico binario $[15, 4]$ de polinomio generador

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1).$$

a) Utilice el hecho de que los factores x^2+x+1, x^4+x^3+1 y x^4+x+1 son polinomios primitivos y las propiedades de detección de ráfagas de error para deducir que la distancia de $\mathcal{C}$ es 6.

b) Se recibe el vector $y(x) = x^{13}+x^{11}+x^8+x^6+x^3+x+1$. Si el decodificador realiza corrección de errores, ¿qué palabra código estima?

8. Los polinomios x^2+x+1 y x^4+x+1 son primitivos.

a) ¿Cuál es el código de menor longitud generado por

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)?$$

b) Si se sabe además que todas las palabras del código no nulas tienen peso múltiplo de 4, deduzca de dos formas distintas que la distancia es 8.

9. El CCSDS (*Consultative Committee for Space Data Systems*) recomienda el empleo del código cíclico binario $[63, 56]$ engendrado por $g(x) = x^7+x^6+x^2+1$ para la codificación de canal en los sistemas de exploración espacial. Sabiendo que x^6+x+1 es un polinomio primitivo:

a) Caracterice las propiedades de detección y corrección del código.

b) ¿Cuál es el menor código cíclico que contiene a x^6+x+1?

10. Para el código $[1023, 1012]$ generado por $g(x) = (x-1)(x^{10}+x^3+1)$,

a) Codifique sistemáticamente el mensaje x.

b) Decodifique el polinomio $x^{12}+x^{10}+x^5+x^3+x^2$. El factor $x^{10}+x^3+1$ es primitivo.

11. Hay únicamente tres códigos cíclicos binarios $[15, 4]$, y uno de ellos es el generado por

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = x^{11}+x^8+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1.$$

a) El código no posee palabras de peso impar. Explique cómo se llega a esta conclusión.

b) $g(x)$ genera un código de distancia 8. Decodifique el vector recibido $x^{14}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^5+x^4+x+1$.

c) Codifique sistemáticamente el mensaje x^3+1.

12. $(x-1)(x^4+x^3+1)$ engendra un código cíclico binario $[15,10]$ y el factor x^4+x^3+1 es primitivo. ¿Qué emite el decodificador si se reciben los siguientes vectores?

a) $y_1(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)$

b) $y_2(x) = x^8+x^6+x^5+x+1$

13. El polinomio $g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)$ genera un código cíclico binario $[15,8]$ y todos sus factores son primitivos.

a) Use las propiedades que conozca para determinar la distancia del código.

b) Decodifique el vector recibido $x^{14}+x^{13}+x^{11}+x^{10}+x^7$.

14. El polinomio $g(x) = x^8+x^7+x^6+x^4+1$ engendra un código cíclico binario de longitud 15 capaz de corregir los errores dobles. A la salida del canal se observa la secuencia $y(x) = x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x^4+x^3+\epsilon x^2+x+1$, en la que se ignora si $\epsilon = 0$ o $\epsilon = 1$ (uno de los símbolos se ha borrado accidentalmente). ¿Es posible decodificar $y(x)$? ¿Cuál sería la salida del decodificador?

15. Para el código $[31,25]$ generado por $g(x) = (x-1)(x^5+x^2+1)$,

a) Codifique sistemáticamente el mensaje $x+1$.

b) Ante el polinomio $x^8+x^7+x^3+x^2+1$ el decodificador estima la palabra del código $(x^2+x+1)g(x)$. ¿Es correcto? El código tiene distancia 4.