Sea la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{Y'(t) = -\lambda Y(t), \quad t > 0, \quad con\, Y(0) = a},$$

con $\boldsymbol{\lambda > 0}$. Su solución es $\boldsymbol{Y(t) = ae^{-\lambda t}}$.

i) **Identifica su ecuación discreta utilizando el método del punto medio (leap-frog).** $\boldsymbol{y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}}$.

ii) **Determina el polinomio de esta ecuación discreta. ¿Cuáles son sus dos raíces** $\boldsymbol{r_1(h), r_2(h)}$**? ¿Hay alguna de módulo mayor que 1?**

iii) **Dados dos valores de arranque,** $\boldsymbol{y_0}$ **e** $\boldsymbol{y_1}$**, calcula** $\boldsymbol{\alpha}$ **y** $\boldsymbol{\beta}$ **para que la solución de la ecuación discreta sea:**

$$\boldsymbol{y_n = \alpha[r_1(h)]^n + \beta[r_2(h)]^n, n = 0, 1, 2, \ldots}$$

iv) **En general, ¿está** $\boldsymbol{y_n}$ **acotada? Identifica para qué datos de arranque sí está acotada.Haz el límite cuando** $\boldsymbol{h \to 0}$ **para un tiempo fijo suponiendo que** $\boldsymbol{y_0 = y_1 = a}$**. Notar que** $\boldsymbol{\alpha}$ **y** $\boldsymbol{\beta}$ **dependen de h.**Para el primer apartado, y utilizando la fórmula del método leapfrog, se tiene que:

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1} = -2h\lambda y_{n+1} \to y_{n+2} + 2h\lambda y_{n+1} - y_n = 0$$

Que es la ecuación discreta buscada.

ii) Para el segundo apartado:

$$p(x) = x^2 + 2h\lambda x - 1 = 0$$

Cuyas soluciones son las raíces buscadas:

$$r_{1,2}(h) = -h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}$$

Donde $r_2(h) = -h\lambda - \sqrt{h^2\lambda^2 + 1} < -1$, para cualquier valor de h y λ, con lo que su módulo será siempre mayor que 1. En cuanto a $r_1(h)$, sea $\gamma = h\lambda$:

$$r_1(\gamma) = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 1} = -\gamma + 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma^{2i}}{(-2)^{2i-1}} = -\gamma + 1 - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma^{2i}}{(-2)^{2i}}$$

Asumiendo que, para γ pequeño, la suma tiende a 0, podemos aproximar $r_1(\gamma)$ por:

$$r_1(\gamma) \cong -\gamma + 1 + O(\gamma^2) \to r_1(h) = -h\lambda + 1 + O((h\lambda)^2) < 1$$

iii) Para el tercer apartado, se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha\big(r_1(h)\big)^0 + \beta\big(r_2(h)\big)^0 = \alpha + \beta \\ y_1 = \alpha r_1(h) + \beta r_2(h) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-r_2}{r_1 - r_2} & \dfrac{1}{r_1 - r_2} \\ \dfrac{r_1}{r_1 - r_2} & \dfrac{-1}{r_1 - r_2} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \dfrac{y_1 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} \\ \dfrac{-y_1 + y_0 r_1}{r_1 - r_2} \end{pmatrix}$$

Con lo que $\alpha = \frac{y_1 - y_0 r_2}{r_1 - r_2}, \beta = \frac{-y_1 + y_0 r_1}{r_1 - r_2}$

iv) Para el cuarto apartado, y_n estará acotada cuando el coeficiente de la raíz cuyo módulo es mayor que 1 sea nulo, para evitar que se propague a infinito conforme n aumente. En general, esto no tiene por qué verificarse.

Así, $\beta = 0$

$$0 = \frac{-y_1 + y_0 r_1}{r_1 - r_2} \rightarrow y_0 r_1 = y_1$$

Estará acotada siempre que $y_1 = r_1 y_0$, con y_0 arbitrario. Para estos valores:

$$\alpha = \frac{y_0 r_1 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} = y_0 \rightarrow y_n = y_0 \big(r_1(h)\big)^n$$

v) Por último, en el quinto apartado:

$$y_0 = y_1 = a$$

$$y_n = \frac{a - a r_2}{r_1 - r_2} \big(r_1(h)\big)^n + \frac{-a + a r_1}{r_1 - r_2} \big(r_2(h)\big)^n$$

$$\lim_{h \to 0} \big(y_n(h)\big) = a \lim_{h \to 0} \left(\frac{1 + h\lambda + \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}}{2\sqrt{h^2\lambda^2 + 1}} \left(-h\lambda + \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}\right)^n + \frac{-1 - h\lambda + \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}}{2\sqrt{h^2\lambda^2 + 1}} \left(-h\lambda - \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}\right)^n \right) =$$

$$\lim_{h \to 0} (y_n) = a(1(1^n) + (0)(-1)^n) = a$$