Universidad Autónoma de Madrid
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación, 2013-2014

Ejercicios 11 a 20

11. Multiplicar la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & \ell & m & n & o \\ p & q & r & s & t \end{bmatrix}$$

por otra matriz $\mathbf{P}$ o $\mathbf{P}^T$ para obtener la matriz

1. $\mathbf{AP}$ donde las columnas 1 y 3 de $\mathbf{A}$ aparecen permutadas.
2. $\mathbf{P}^T\mathbf{A}$ donde las filas 1 y 4 de $\mathbf{A}$ aparecen permutadas.
3. $\mathbf{AP}$ donde las columnas de $\mathbf{A}$ aparecen permutadas conforme a la permutación
$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. $\mathbf{P}^T\mathbf{A}$ donde las filas de $\mathbf{A}$ aparecen permutadas de acuerdo a la permutación
$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Identificar las matrices $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^T$ y $\mathbf{P}^{-1}$ en términos de las columnas de la matriz identidad $\mathbf{I}$ y de las permutaciones $\boldsymbol{\pi}$ y $\boldsymbol{\pi}^{-1}$.

12. Sabemos que la permutación de las filas i y j de la matriz $\mathbf{A}$ se realiza multiplicando $\mathbf{A}$ por la izquierda por la «permutación elemental»

$$\mathbf{I} - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T .$$

Demostrar que toda permutación elemental es invertible y calcular su inversa.

El producto de varias permutaciones elementales se llama *matriz de permutación*. Demostrar que toda matriz de permutación $\mathbf{P}$ es invertible y verifica

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1} .$$

13. Sea $\mathbf{B}$ una matriz $\mathbb{R}^{4\times 4}$ a la que se aplican las siguientes operaciones, por este orden:

1. Multiplicar la primera columna por 2.
2. Dividir entre 2 la tercera fila.
3. Sumar la tercera fila multiplicada por 5 a la primera fila.
4. Permutar las columnas primera y cuarta.
5. Restar la segunda fila de cada una de las otras filas.
6. Sustituir la cuarta columna por la segunda columna.
7. Suprimir la tercera columna [1].

Se pide:

a) Escribir el resultado como producto ordenado de ocho matrices.

b) Escribir el resultado como producto ordenado de tres matrices, $\mathbf{ABC}$.

14. Hallar una matrix $\mathbf{M}$, 4×4, tal que para toda matriz $\mathbf{A}$, $4 \times n$, el producto $\mathbf{MA}$ dé como resultado que a cada fila de $\mathbf{A}$ se le ha sumado 3 veces la suma de la primera y cuarta filas de $\mathbf{A}$. ¿Es posible escribir $\mathbf{M}$ como producto de matrices elementales?

15. Sea la matriz 6×6

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a & 0 & A & 0 & C & 0 \\ & b & B & 0 & D & 0 \\ & & & c & E & 0 \\ & & & & & d \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}.$$

1. Permutar las filas de $\mathbf{E}$ multiplicando por una matriz $\mathbf{P}$ de permutación para que $\mathbf{T} = \mathbf{P}^T\mathbf{E}$ sea $\mathbf{T} = \operatorname{diag}\left[a\,, b\,, 0\,, c\,, 0\,, d\right]$. Escribir la permutación $\boldsymbol{\pi}$ asociada a $\mathbf{P}$. Escribir también la permutación $\boldsymbol{\pi}^{-1}$ inversa de $\boldsymbol{\pi}$. Obsérvese que $\mathbf{T}$ es triangular superior.
2. Permutar las columnas de $\mathbf{E}$ multiplicando por una matriz $\mathbf{Q}$ de permutación para que $\mathbf{S} = \mathbf{EQ}$ resulte $\mathbf{S} = \operatorname{diag}\left[a\,, b\,, c\,, d\,, 0\,, 0\right]$. Escribir la permutación $\boldsymbol{\sigma}$ asociada a $\mathbf{Q}$. Escribir también la permutación $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ inversa de $\boldsymbol{\sigma}$.
3. Escribir $\mathbf{T}$ en función de $\mathbf{S}$. Calcular $\mathbf{S}^2$ y $\mathbf{T}^2$ cuando $a = b = c = d = 1$.

[1] La matriz resultante tendrá una columna menos.

16. Dada la matriz

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & x & 1 & & \\ & y & & 1 & \\ & z & & & 1 \end{bmatrix},$$

escribir $\mathbf{M}_2$ en términos de $\mathbf{I_5}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{I_5}(:,2)$ y de la columna

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Utilizar este resultado para calcular el producto de

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a & 1 & & & \\ b & & 1 & & \\ c & & & 1 & \\ d & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

por $\mathbf{M}_2$. Calcular también $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$.

17. Sea

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a & 1 & & & \\ b & & 1 & & \\ c & & & 1 & \\ d & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

y sea $\mathbf{A}$ una matriz de 5 filas. Escribir el producto $\mathbf{M}_1\mathbf{A}$ «fila a fila». Observando la acción que el producto de $\mathbf{M}_1$ por $\mathbf{A}$ realiza sobre las filas de $\mathbf{A}$, ¿cuál es la inversa de $\mathbf{M}_1$?

Sea

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & x & 1 & & \\ & y & & 1 & \\ & z & & & 1 \end{bmatrix}$$

y consideremos la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}$. Utilizar las inversas de $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ para obtener $\mathbf{L}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{LB}$.

18. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ y sean

$$\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Escribir detalladamente las matrices elementales

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{I}_m - \mathbf{u}_j\, \mathbf{e}_j^T\,, \qquad \mathbf{H}_j = \mathbf{I}_m - \mathbf{v}_j\, \mathbf{e}_j^T\,,$$

y calcular sus inversas.

Calcular los productos $\mathbf{M}_j\mathbf{H}_j$ y $\mathbf{H}_j\mathbf{M}_j$.

19. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 7 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular los valores de $a\,,b\,,c\,,d$ en la matriz

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a & 1 & & & \\ b & & 1 & & \\ c & & & 1 & \\ d & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

para que en la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1\mathbf{A}$ se tenga $\mathbf{B}_{\,\mathtt{2:end}\,,\,1} = \mathbf{0}$. Escribir $\mathbf{B}$ completa.

Multiplicar $\mathbf{B}$ por una matriz de la forma

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \\ f \\ g \end{bmatrix} \mathbf{e}_2^T$$

para obtener $\left(\mathbf{M}_2\mathbf{B}\right)_{\,\mathtt{3:end}\,,\,2} = \mathbf{0}$.

Proceder sucesivamente con las columnas tercera y cuarta hasta completar una secuencia que produce la matriz

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}_4\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}$$

y finalmente escribir $\mathbf{A}$ como producto de las inversas de las matrices $\mathbf{M}_i$ y de la matriz $\mathbf{U}$.

20. Sea la matriz

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ & & -5 & -4 & -7 & 1 \\ & & & 28 & 19 & -12 \\ & & & & -283 & 94 \end{bmatrix}.$$

Escribir y resolver el sistema homogéneo $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$.

Calcular los valores de $a\,, b\,, c\,, d$ en la matriz

$$\mathbf{H}_5 = \begin{bmatrix} 1 & & & & a \\ & 1 & & & b \\ & & 1 & & c \\ & & & 1 & d \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

para que en la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{H}_4\mathbf{U}$ se tenga $\mathbf{B}_{\,1:\mathtt{end}-1\,,\,5} = \mathbf{0}$.

Multiplicar $\mathbf{B}$ por una matriz de la forma

$$\mathbf{H}_4 = \mathbf{I} - \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_4^T$$

determinando $e\,, f\,, g$ para que resulte $\left(\mathbf{H}_4\mathbf{B}\right)_{\,1:\mathtt{end}-2\,,\,4} = \mathbf{0}$.

Continuar de igual modo con las columnas tercera y segunda hasta obtener una secuencia

$$\mathbf{D} = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_3\mathbf{H}_4\mathbf{H}_5\mathbf{U}\,.$$

Escribir y resolver el sistema de ecuaciones $\mathbf{Dx} = \mathbf{0}$.