UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación, 2013-2014

Ejercicios 88 a 97

88. Sean $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la aplicación lineal definida mediante

$$\begin{cases} T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \\ T(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \end{cases}$$

1. Escribir una base $\mathcal{B}'_2 = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2} = \mathbf{I}\,. \tag{5}$$

2. Hallar una base $\mathcal{B}'_1 = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

89. Sean $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea

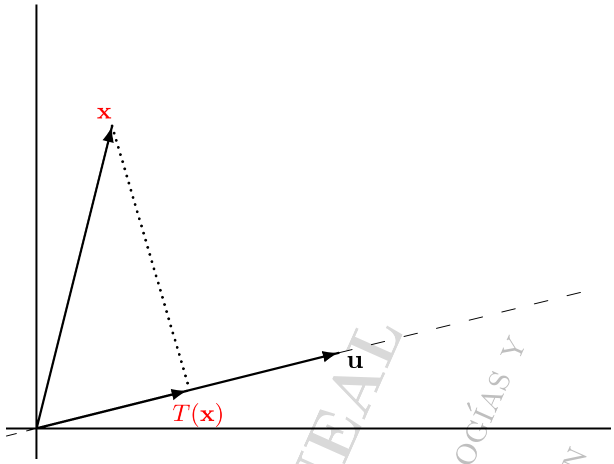
$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la aplicación lineal definida mediante

$$\begin{cases} 2\,T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 \\ T(\mathbf{u}_1) - T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) - T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,. \end{cases} \tag{7}$$

1. Escribir bases $\mathcal{B}'_1 = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ y $\mathcal{B}'_2 = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que

90. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Consideremos la «proyección ortogonal» T que aplica cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ sobre su componente en la dirección de $\mathbf{u}$.



Se pide:

1. Escribir la matriz $[T]_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c}$ de T respecto de la base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^2$.

2. Escribir la matriz $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ de T respecto de la base $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{u}\,, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e_2} \,\}$ de $\mathbb{R}^2$.

91. Se considera la aplicación $T : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ que a cada $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_3$ asocia $T(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$, definido por

$$\mathbf{q}(t) = (1 + t + t^2)\,\mathbf{p}(0) + \mathbf{p}'(t) + (1 - t)\,\mathbf{p}''(t) - \frac{7}{6}\,t\,\mathbf{p}^{(3}(t)\,.$$

Comprobar que T es aplicación lineal y calcular la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}_3 = \{1\,, t\,, t^2\,, t^3\}$ en salida y $\mathcal{B}_2 = \{1\,, t\,, t^2\}$ en llegada.

92. a) En el espacio vectorial $\mathcal{P}_n$ de los polinomios de grado $\leq n$, comprobar que la aplicación

$$\mathrm{D}^j : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n-j}$$

que a cada polinomio $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_n$ asocia su derivada de orden j,

$$\mathbf{q} = \mathrm{D}^j\mathbf{p}\,, \qquad \text{siendo} \quad \mathbf{q}(t) = \frac{d^{(j}\mathbf{p}(t)}{dt^{(j}}\,,$$

es una aplicación lineal $T : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n-k}$.

93. Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\le n$ y sea $\mathcal{B}_n$ la base $\mathcal{B}_n = \{ 1 , t , t^2 , \dots , t^n \}$ de $\mathcal{P}_n$. Se considera la aplicación lineal

$$T : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$$

definida mediante

$$T(\mathbf{p}) = \mathbf{q} , \qquad \text{siendo} \quad \mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{p}(s)\, ds ,$$

para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_n$. Escribir la matriz $[T]_{\mathcal{B}_n , \mathcal{B}_{n+1}}$, de la aplicación lineal T respecto de las bases $\mathcal{B}_n$ en salida y $\mathcal{B}_{n+1}$ en llegada.

94. Considérese la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

del espacio vectorial de las matrices $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Escribir la matriz $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ de cada una de las aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ siguientes:

1. $T(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + 3\,\mathbf{X}^T$.
2. $T(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A}$, siendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

95. En el espacio vectorial E de las matrices 2×2 de números reales consideramos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} T : & E & \longrightarrow & E \\ & \mathbf{A} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se pide:

1. Hallar la matriz de T respecto de la base

96. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran la base canónica $\mathcal{B}_c$ y la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Escribir la matriz de la aplicación lineal identidad respecto de $\mathcal{B}_c$ en salida y $\mathcal{B}$ en llegada.

97. Sea T la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\,x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2\,x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

1. Hallar los subespacios $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.
2. Para cada $\mathbf{y} \in \operatorname{Im} T$, hallar $T^{-1}(\mathbf{y}) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, T(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \,\}$.