Ejercicios de Álgebra Lineal

41. Escribir $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

42. En $\mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios $E_1 = L((1,2,1)^t, (1,3,2)^t)$ y $E_2 = L((1,1,0)^t, (3,8,5)^t)$. Comprobar que $E_1 = E_2$.

43. Consideremos un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Mostrar que el conjunto W de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

44. Sean u, v y w tres vectores linealmente independientes, en un espacio vectorial sobre un cuerpo de característica distinta de dos. Mostrar que $u+v, u-v$ y $u-2v+w$ son linealmente independientes.

45. Supongamos que en el $\mathbb{K}$-espacio vectorial V el sistema $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es libre pero que $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ es ligado. Demostrar que v es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

46. Sean $n \geq 3$ y u_1, u_2, u_3 y u_4 cuatro vectores distintos de $\mathbb{K}^n$ tales que los sistemas

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \ \{u_1, u_2, u_4\}, \ \{u_1, u_3, u_4\} \text{ y } \{u_2, u_3, u_4\}$$

son libres. ¿Se puede asegurar que también $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es libre? Demostrarlo si es cierto y mostrar un contraejemplo en caso contrario.

47. Determinar los valores de a y b para que el vector $(1, 4, a, b)^t$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1, 2)^t$ y $(0, 1, 2, 1)^t$.

51. Sean $H = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{K}^4 \mid x{+}y = z{+}t = 0\}$ y $M = L((1, 1, 0, 0)^t, (1, 0, 1, 0)^t, (1, 0, 0, 1)^t)$ subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^4$. Hallar una base y la dimensión de H, M, $H \cap M$ y $H + M$.

52. Estudiar si los vectores $(1, 0, -1, 2)^t$, $(2, 3, 1, 1)^t$, $(1, 3, 2, -1)^t$ y $(1, 1, 0, 1)^t$ de $\mathbb{K}^4$ son linealmente independientes. Extraer de ellos el mayor número posible que lo sean y construir una base de $\mathbb{K}^4$ que contenga a esos vectores elegidos.

53. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Probar que el conjunto $H = \{X \in M_2(\mathbb{K}) \mid XA = AX\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ y calcular su dimensión.

54. En $\mathbb{K}^4$ se consideran los subespacios vectoriales $U = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{K}^4 | y + z + t = 0\}$ y $W = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{K}^4 | x{+}y = z{-}2t = 0\}$. Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de: U, W, $U \cap W$ y $U + W$.

55. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2. En $M_n(\mathbb{K})$, ¿es subespacio el conjunto $M_n^s(\mathbb{K})$ formado por las matrices simétricas de orden n? ¿Y el conjunto $M_n^a(\mathbb{K})$ formado por las matrices antisimétricas? Demostrar que

$$M_n(\mathbb{K}) = M_n^s(\mathbb{K}) \oplus M_n^a(\mathbb{K})$$

y calcular las dimensiones de los sumandos.

56. Sea $W = L(v_1, v_2, v_3, v_4)^t \subset \mathbb{K}[t]$, donde $v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, $v_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$, $v_3 = t^3 + 6t - 5$ y $v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$. Hallar una base y la dimensión de W.

57. Hallar una base, la dimensión y unas ecuaciones implícitas del subespacio H cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$H : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ y & = & \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \\ z & = & 3\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 \\ t & = & -\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 \end{array} \right.$$

Ampliar la base de H a una base de $\mathbb{K}^4$.

58. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^4$:

$$U = L((1, 1, 0, -1)^t, (1, 2, 3, 0)^t, (2, 3, 3, -1)^t)$$

$$W = L((1, 2, 2, -2)^t, (2, 3, 2, -3)^t, (1, 3, 4, -3)^t)$$

Hallar las dimensiones de $U + W$ y $U \cap W$.