

Tema 2: Espacios vectoriales

Ejercicios

1. En \mathbb{R}^2 se definen las siguientes operaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{y} \quad \alpha \star (x, y) = (\alpha x, y)$$

¿Es un espacio vectorial?

2. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos, de \mathbb{R}^3 o $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, son subespacios vectoriales?

- | | |
|---|---|
| (a) $S = \{(x, y, z) : y = 0\}$ | (e) $S = \{(x, y, z) : x + z \leq 0\}$ |
| (b) $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ | (f) $S = \{(x, y, z) : xy = 0\}$ |
| (c) $S = \{(x, y, z) : x + z = 1\}$ | (g) $S = \{p(x) = x^3 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ |
| (d) $S = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$ | (h) $S = \{p(x) = ax^3 + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ |

3. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores en \mathbb{R}^3 :

- | | |
|---|---|
| (a) $\{(0, 1, 0), (1, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$ | (c) $\{(1, 0, a), (a, 1, 0), (0, a, 1)\}$ |
| (b) $\{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ | (d) $\{(1, 0, a), (a, 1, 0), (a, 0, 1)\}$ |

4. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ | (c) $\{1 - x^2, 1 + x, x^2 - x, x + x^2\}$ |
| (b) $\{x, x^2, x + x^2\}$ | (d) $\{1 + x^2, 2 + x^2\}$ |

5. Sean $f, g, h : \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como: $f(a) = 0, f(b) = f(c) = 1; g(a) = g(c) = 1, g(b) = 0; h(a) = h(b) = 1, h(c) = 0$. Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto $\{f, g, h\}$.

6. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes. En el primer caso, encuentra una combinación lineal entre ellos y un subconjunto con un número máximo de vectores linealmente independientes.

- | | |
|--|--|
| (a) $\{(3, 5, 1), (2, 1, 3)\}$ | (c) $\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (0, 1, 1, 1), (2, 2, 4, 2)\}$ |
| (b) $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (0, -1, 1)\}$ | (d) $\{1 + 3x + 4x^2, 4 + x^2, 3 + x + 2x^2\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ |

7. ¿Para qué valores de a el conjunto $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ es base de \mathbb{R}^3 ? Para $a = 2$, calcula las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$ respecto de dicha base.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

10. Averigua si los vectores $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$ y $\mathbf{w} = (2, -3, 1)$ pertenecen al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1 = (2, 5, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 4, 1), \mathbf{v}_3 = (5, 9, 2)\}$.
11. Determina a y b para que el vector $(2, a, 3, -b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(2, 3, 1, -5)$ y $(0, 2, -1, 3)$.
12. Sean los conjuntos: $A = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $B = \{(2, 1, -1), (1, 2, 1)\}$ y $C = \{(2, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Demuestra que A y B generan el mismo subespacio, y que éste no coincide con el generado por C .
13. Halla una base del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores:

$$\{\mathbf{v}_1 = (3, 2, 0, 5), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 3, -4), \mathbf{v}_3 = (2, 2, 3, 1), \mathbf{v}_4 = (0, 2, -9, 17)\}$$

14. Se consideran los vectores de \mathbb{R}^4 : $(1 + a, 1, 1, 1)$, $(1, 1 + a, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + a, 1)$ y $(1, 1, 1, 1 + a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determina, en función de a , la dimensión y una base del espacio vectorial S que generan.
15. Halla la dimensión y una base del espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b + 3c & 2a - b \\ -a - c & a + 2b + 5c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

16. Estudia si es subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas:

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

En caso afirmativo, determina una base.

17. Encuentra un sistema de generadores, una base y la dimensión del subespacio vectorial de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

18. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, determina la dimensión y una base del espacio vectorial generado por $\{A^n : n \geq 0\}$.

19. En \mathbb{R}^3 se consideran $S = \{(x, y, z) : x = -z\}$ y $T = \{(x, y, z) : x = z - y\}$.

(a) Demuestra que S y T son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

20. En \mathbb{R}^4 se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L(\{(1, 0, 1, 1), (1, -1, -1, 0), (0, 1, 2, 1)\})$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$$

Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base de $S + T$ y de $S \cap T$.

21. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos

$$S = \{p(x) : p(-1) = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b : a, b \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Prueba que S y T son subespacios vectoriales.
- (b) Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base de S y de T .
- (c) Calcula $S \cap T$ y $S + T$.

22. En $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Halla la dimensión y una base de los subespacios V_1 , V_2 , $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

23. En \mathbb{R}^4 se consideran los subespacios vectoriales:

$$S \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad T \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ x_2 = \beta + \gamma \\ x_3 = -\alpha + \beta \\ x_4 = 3\beta + 3\gamma \end{cases} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Halla bases y dimensiones de S , T , $S + T$ y $S \cap T$.

24. En \mathbb{R}^5 se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = L(\{(1, 0, -1, 0, 0), (2, 1, 0, 1, -1), (4, 1, -2, 1, -1)\})$$

$$W = L(\{(1, -1, 1, -1, 1), (-2, 0, 0, 0, 3), (0, 1, 2, 1, -1), (0, -2, 2, -2, 5)\})$$

Halla bases de U , W , $U + W$ y $U \cap W$.

25. En \mathbb{R}^3 se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{(x, y, z) : z = 0\} \quad \text{y} \quad W = L(\{(0, 1, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 2)\})$$

Halla un sistema de generadores y las dimensiones de los subespacios U , W , $U + W$ y $U \cap W$.

26. En \mathbb{R}^4 se consideran los subespacios vectoriales:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

27. En \mathbb{R}^3 se consideran los subespacios:

$$U = \{(a, b, c) : a = c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(a, b, c) : a + b + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Prueba que $\mathbb{R}^3 = U + V = U + W = V + W$. ¿Cuál de las sumas anteriores es directa?

28. En \mathbb{R}^3 se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L(\{(1, 0, 1), (1, 1, -1), (2, 1, 0)\}) \quad T = L(\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (3, 0, -1)\})$$

Halla un subespacio U tal que $\mathbb{R}^3 = S \oplus U$, y $T + U$ no sea suma directa.

29. En \mathbb{R}^4 se consideran los subespacios vectoriales:

$$S_1 = L(\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 2), (0, -1, 2, -2)\})$$

$$S_2 = L(\{(1, 1, 1, 0), (-1, -1, 1, -2)\})$$

¿Es $S_1 + S_2$ suma directa? Halla una base de dicha suma.

30. Determina $a, b \in \mathbb{R}$ para que el vector $\mathbf{v} = (2, a, b, 1)$ pertenezca al subespacio vectorial $S = L(\{(1, 0, 2, 0), (0, -1, 1, 1)\})$. Obtén un subespacio suplementario de S en \mathbb{R}^4 .

31. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$V = L(\{1 + x^3, 1 + x + x^2, 2x - x^2, 2 + 3x^2\})$$

$$W = L(\{1 + 3x^2 - x^3, 1 + 4x + x^2 - x^3, 2x - x^2\})$$

Demuestra que $W \subset V$, y halla un suplementario de W en V .

32. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$V = L(\{x + x^2, x - x^2, 2x + x^2\})$$

$$W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : b + c = 0, 2b - c = 0\}$$

$$T = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a = 0, b = -\mu, c = 0, d = \lambda + \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

(a) Halla $V \cap W$ y $V + W$. ¿Son V y W suplementarios?

(b) Halla una base de $W \cap T$ y las ecuaciones implícitas de $V + T$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. (a) l.d.; (b) l.i.; (c) l.d. si $a = -1$, y l.i. si $a \neq -1$; (d) l.i. si $a \neq \pm 1$, y l.d. si $a = \pm 1$.
4. (a) y (d) l.i.; (b) y (c) l.d.
5. Son l.i.
6. (a) l.i.; (b) l.d., $\{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 3, 2)\}$ es l.i., y $\mathbf{v}_3 = (0, -1, 1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$; (c) l.d., $\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)\}$ es l.i., y $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3, 1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_4 = (2, 2, 4, 2) = 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; (d) l.d., $\{p_1(x) = 1 + 3x + 4x^2, p_2(x) = 4 + x^2\}$ es l.i., y $p_3(x) = 3 + x + 2x^2 = \frac{1}{3}p_1(x) + \frac{2}{3}p_2(x)$.
7. Es base para $a \neq 0$ y $a^2 \neq 2$. Para $a = 2$, $\mathbf{v} = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})_B$.
8. $\mathbf{p} = 2 - 3x + x^2 + 2x^3 = (2, -5, 7, -2)_B$.
9. $\mathbf{p} = a + bx + cx^2 = (a - 3b + 9c, b - 6c, c)_B$.
10. $\mathbf{u} \in L(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$, siendo $\mathbf{u} = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, y $\mathbf{w} \notin L(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$.
11. $a = -1$ y $b = 11$.
12. $L(A) = L(B) = L(\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}) = S$, y $L(C) \neq S$ porque $(1, -1, 0) \notin S$.
13. $B = \{(3, 2, 0, 5), (0, 2, 9, -7), (0, 0, 3, -4)\}$.
14. Si $a = 0$: $\dim S = 1$ y $B = \{(1, 1, 1, 1)\}$.
Si $a = -4$: $\dim S = 3$ y $B = \{(1, 1, 1, -3), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq -4$: $\dim S = 4$, es decir $S = \mathbb{R}^4$, y una base es la canónica.
15. $\dim M = 2$ y $B = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
16. (a) Sí, es un subespacio vectorial de dimensión 2 y base $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$.
(b) No es un subespacio vectorial.
17. Un sistema generadores y base es $\{(1, 1, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0, 1)\}$. Su dimensión es 2.
18. La dimensión es 3, y la base $\left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
19. (b) $B_S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ y $\mathbf{u} = (a, b, -a) = (a, b)_{B_S}$.
(c) $(-2, 1, -1) = (-1, 2)_{B_T}$
20. $S + T: \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha + \gamma \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; x_1 + x_2 - x_4 = 0;$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

21. (b) Representando $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, respecto de la base usual en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, entonces

$$S: \begin{cases} a_0 = \alpha - \beta + \gamma \\ a_1 = \alpha \\ a_2 = \beta \\ a_3 = \gamma \end{cases}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0;$$

y $B_S = \{(1, 1, 0, 0) = 1 + x, (-1, 0, 1, 0) = -1 + x^2, (1, 0, 0, 1) = 1 + x^3\}$.

$$T: \begin{cases} a_0 = 2\beta \\ a_1 = \alpha + \beta \\ a_2 = \beta \\ a_3 = \alpha \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \begin{cases} a_0 - 2a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases};$$

y $B_T = \{(0, 1, 0, 1) = x + x^3, (2, 1, 1, 0) = 2 + x + x^2\}$.

$$(c) S \cap T: \begin{cases} a_0 = 2\alpha \\ a_1 = 2\alpha \\ a_2 = \alpha \\ a_3 = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}; \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_0 - 2a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases};$$

y $B_{S \cap T} = \{(2, 2, 1, 1) = 2 + 2x + x^2 + x^3\}$.

$S + T = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

22. $\dim V_1 = 2$, y $B_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\dim V_2 = 3$, y $B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\dim(V_1 + V_2) = 4$, luego $V_1 + V_2 = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y una base es la usual.

$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, y $B_{V_1 \cap V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

23. $\dim S = 2$, y $B_S = \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$.

$\dim T = 2$, y $B_T = \{(2, 1, 0, 3), (-1, 0, 1, 0)\}$.

$\dim(S + T) = 3$, y $B_{S+T} = \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\}$.

$\dim(S \cap T) = 1$, y $B_{S \cap T} = \{(1, 0, -1, 0)\}$.

24. $B_U = \{(1, 0, -1, 0, 0), (0, 1, 2, 1, -1)\}$.

$B_W = \{(1, -1, 1, -1, 1), (0, 1, 2, 1, -1), (0, 0, 2, 0, 1)\}$.

$B_{U+W} = \{(1, 0, -1, 0, 0), (0, 1, 2, 1, -1), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

$B_{U \cap W} = \{(0, 1, 2, 1, -1)\}$.

25. $\dim U = 2$, y $B_U = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

$\dim W = 2$, y $B_W = \{(2, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

$\dim(U + W) = 3$, luego $U + W = \mathbb{R}^3$ y $B_{U+W} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

$\dim(U \cap W) = 1$, y $B_{U \cap W} = \{(2, -1, 0)\}$.

26. $\dim S = 2$, $\dim T = 3$, y $\dim(S + T) = 3$, de donde $\dim(S \cap T) = 2$. Por lo tanto $S + T = T$ y $S \cap T = S$, es decir $S \subset T$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

30. $a = -1$ y $b = 5$. $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$, con $T = L(\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\})$.
31. $W \subset V$, y $V = W \oplus U$ con $U = L(\{3x^2 - 2x^3\})$.
32. (a) $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$ y $V + W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, luego V y W son suplementarios.
(b) $B_{W \cap T} = \{x^3\}$. Las ecuaciones implícitas de $V + T$ son $a = 0$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a white shadow is cast below the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70