Tema 2: Espacios vectoriales

Ejercicios

1. En $\mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{y} \qquad \alpha \star (x, y) = (\alpha x, y)$$

¿Es un espacio vectorial?

2. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos, de $\mathbb{R}^3$ o $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, son subespacios vectoriales?

(a) $S = \{(x, y, z) \,:\, y = 0\}$
(b) $S = \{(x, y, z) \,:\, x + y + z = 0\}$
(c) $S = \{(x, y, z) \,:\, x + z = 1\}$
(d) $S = \{(x, y, z) \,:\, x + z = 0\}$
(e) $S = \{(x, y, z) \,:\, x + z \leq 0\}$
(f) $S = \{(x, y, z) \,:\, xy = 0\}$
(g) $S = \left\{p(x) = x^3 + ax + b \,:\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$
(h) $S = \left\{p(x) = ax^3 + b \,:\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$

3. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(0, 1, 0), (1, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$
(b) $\{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
(c) $\{(1, 0, a), (a, 1, 0), (0, a, 1)\}$
(d) $\{(1, 0, a), (a, 1, 0), (a, 0, 1)\}$

4. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

(a) $\left\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\right\}$
(b) $\left\{x, x^2, x + x^2\right\}$
(c) $\left\{1 - x^2, 1 + x, x^2 - x, x + x^2\right\}$
(d) $\left\{1 + x^2, 2 + x^2\right\}$

5. Sean $f, g, h \,:\, \{a, b, c\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como: $f(a) = 0$, $f(b) = f(c) = 1$; $g(a) = g(c) = 1$, $g(b) = 0$; $h(a) = h(b) = 1$, $h(c) = 0$. Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto $\{f, g, h\}$.

6. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes. En el primer caso, encuentra una combinación lineal entre ellos y un subconjunto con un número máximo de vectores linealmente independientes.

(a) $\{(3, 5, 1), (2, 1, 3)\}$
(b) $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (0, -1, 1)\}$
(c) $\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (0, 1, 1, 1), (2, 2, 4, 2)\}$
(d) $\left\{1 + 3x + 4x^2, 4 + x^2, 3 + x + 2x^2\right\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

7. ¿Para qué valores de a el conjunto $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$? Para $a = 2$, calcula las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$ respecto de dicha base.

8. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se considera la base $B = \left\{1, 1 - x, (1 - x)^2, (1 - x)^3\right\}$. Halla las coordenadas del polinomio $\mathbf{p} = 2 - 3x + x^2 + 2x^3$ respecto de dicha base.

9. En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se considera el conjunto $B = \left\{1, x + 3, (x + 3)^2\right\}$. Prueba que es una base, y halla las coordenadas del polinomio $\mathbf{p} = a + bx + cx^2$ respecto de dicha base.

10. Averigua si los vectores $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$ y $\mathbf{w} = (2, -3, 1)$ pertenecen al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1 = (2, 5, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 4, 1), \mathbf{v}_3 = (5, 9, 2)\}$.

11. Determina a y b para que el vector $(2, a, 3, -b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(2, 3, 1, -5)$ y $(0, 2, -1, 3)$.

12. Sean los conjuntos: $A = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $B = \{(2, 1, -1), (1, 2, 1)\}$ y $C = \{(2, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Demuestra que A y B generan el mismo subespacio, y que éste no coincide con el generado por C.

13. Halla una base del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores:
$$\{\mathbf{v}_1 = (3, 2, 0, 5), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 3, -4), \mathbf{v}_3 = (2, 2, 3, 1), \mathbf{v}_4 = (0, 2, -9, 17)\}$$

14. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^4$: $(1 + a, 1, 1, 1)$, $(1, 1 + a, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + a, 1)$ y $(1, 1, 1, 1 + a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determina, en función de a, la dimensión y una base del espacio vectorial S que generan.

15. Halla la dimensión y una base del espacio vectorial
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+3c & 2a-b \\ -a-c & a+2b+5c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

16. Estudia si es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas:
$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{array} \right.$$
En caso afirmativo, determina una base.

17. Encuentra un sistema de generadores, una base y la dimensión del subespacio vectorial de soluciones del sistema:
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{array} \right.$$

18. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, determina la dimensión y una base del espacio vectorial generado por $\{A^n : n \geq 0\}$.

19. En $\mathbb{R}^3$ se consideran $S = \{(x, y, z) : x = -z\}$ y $T = \{(x, y, z) : x = z - y\}$.
    (a) Prueba que S y T son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Encuentra una base de S, y halla las coordenadas de un vector arbitrario de S respecto de dicha base.
    (c) Prueba que $B_T = \{(0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$ es una base de T, y encuentra las coordenadas de $(-2, 1, -1) \in T$ respecto de dicha base.

20. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L(\{(1,0,1,1),(1,-1,-1,0),(0,1,2,1)\})$$
$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,:\, x_1 - x_3 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$$

Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base de $S+T$ y de $S\cap T$.

21. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos

$$S = \{p(x) \,:\, p(-1)=0\} \quad \text{y} \quad T = \left\{p(x) = ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b \,:\, a,b \in \mathbb{R}\right\}$$

(a) Prueba que S y T son subespacios vectoriales.

(b) Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base de S y de T.

(c) Calcula $S\cap T$ y $S+T$.

22. En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,:\, a,b \in \mathbb{R}\right\} \qquad V_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \,:\, a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

Halla la dimensión y una base de los subespacios V_1, V_2, V_1+V_2 y $V_1\cap V_2$.

23. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S \equiv \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \end{array}\right. \qquad T \equiv \left\{\begin{array}{l} x_1=\alpha+\beta+2\gamma \\ x_2=\beta+\gamma \\ x_3=-\alpha+\beta \\ x_4=3\beta+3\gamma \end{array}\right. \quad ;\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

Halla bases y dimensiones de S, T, $S+T$ y $S\cap T$.

24. En $\mathbb{R}^5$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = L(\{(1,0,-1,0,0),\ (2,1,0,1,-1),\ (4,1,-2,1,-1)\})$$
$$W = L(\{(1,-1,1,-1,1),\ (-2,0,0,0,3),\ (0,1,2,1,-1),\ (0,-2,2,-2,5)\})$$

Halla bases de U, W, $U+W$ y $U\cap W$.

25. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{(x,y,z) \,:\, z=0\} \quad \text{y} \quad W = L(\{(0,1,1),(2,0,1),(2,1,2)\})$$

Halla un sistema de generadores y las dimensiones de los subespacios U, W, $U+W$ y $U\cap W$.

26. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L(\{(1,0,2,-1),(0,-1,2,0),(2,-1,6,-2)\})$$
$$T = L(\{(1,-1,4,-1),(1,0,0,1),(-1,-2,2,1)\})$$

Demuestra que $\dim(S+T)=3$ y que $\dim(S\cap T)=2$.

27. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios:

$$\begin{aligned} U &= \{(a,b,c) \,:\, a=c,\ a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ V &= \{(0,0,c) \,:\, c \in \mathbb{R}\} \\ W &= \{(a,b,c) \,:\, a+b+c=0,\ a,b,c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Prueba que $\mathbb{R}^3 = U+V = U+W = V+W$. ¿Cuál de las sumas anteriores es directa?

28. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L\left(\{(1,0,1),\ (1,1,-1),\ (2,1,0)\}\right) \qquad T = L\left(\{(1,0,1),\ (0,0,1),\ (3,0,-1)\}\right)$$

Halla un subespacio U tal que $\mathbb{R}^3 = S \oplus U$, y $T+U$ no sea suma directa.

29. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} S_1 &= L\left(\{(1,0,1,0),(2,1,0,2),(0,-1,2,-2)\}\right) \\ S_2 &= L\left(\{(1,1,1,0),(-1,-1,1,-2)\}\right) \end{aligned}$$

¿Es S_1+S_2 suma directa? Halla una base de dicha suma.

30. Determina $a,b \in \mathbb{R}$ para que el vector $\mathbf{v} = (2,a,b,1)$ pertenezca al subespacio vectorial $S = L\left(\{(1,0,2,0),(0,-1,1,1)\}\right)$. Obtén un subespacio suplementario de S en $\mathbb{R}^4$.

31. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} V &= L\left(\left\{1+x^3,\ 1+x+x^2,\ 2x-x^2,\ 2+3x^2\right\}\right) \\ W &= L\left(\left\{1+3x^2-x^3,\ 1+4x+x^2-x^3,\ 2x-x^2\right\}\right) \end{aligned}$$

Demuestra que $W \subset V$, y halla un suplementario de W en V.

32. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} V &= L\left(\left\{x+x^2,\ x-x^2,\ 2x+x^2\right\}\right) \\ W &= \left\{a+bx+cx^2+dx^3 \,:\, b+c=0,\ 2b-c=0\right\} \\ T &= \left\{a+bx+cx^2+dx^3 \,:\, a=0,\ b=-\mu,\ c=0,\ d=\lambda+\mu,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

   (a) Halla $V \cap W$ y $V+W$. ¿Son V y W suplementarios?
   (b) Halla una base de $W \cap T$ y las ecuaciones implícitas de $V+T$.

Soluciones

1. No.
2. (a), (b), (d) y (h) Si; (c), (e), (f) y (g) No.

3. (a) l.d.; (b) l.i.; (c) l.d. si $a = -1$, y l.i. si $a \neq -1$; (d) l.i. si $a \neq \pm 1$, y l.d. si $a = \pm 1$.

4. (a) y (d) l.i.; (b) y (c) l.d.

5. Son l.i.

6. (a) l.i.; (b) l.d., $\{\mathbf{v}_1 = (1,2,3), \mathbf{v}_2 = (1,3,2)\}$ es l.i., y $\mathbf{v}_3 = (0,-1,1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$; (c) l.d., $\{\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1,1,1)\}$ es l.i., y $\mathbf{v}_3 = (2,1,3,1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_4 = (2,2,4,2) = 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; (d) l.d., $\left\{p_1(x) = 1 + 3x + 4x^2, p_2(x) = 4 + x^2\right\}$ es l.i., y $p_3(x) = 3 + x + 2x^2 = \frac{1}{3}p_1(x) + \frac{2}{3}p_2(x)$.

7. Es base para $a \neq 0$ y $a^2 \neq 2$. Para $a = 2$, $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)_B$.

8. $\mathbf{p} = 2 - 3x + x^2 + 2x^3 = (2,-5,7,-2)_B$.

9. $\mathbf{p} = a + bx + cx^2 = (a - 3b + 9c, b - 6c, c)_B$.

10. $\mathbf{u} \in L\left(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\right)$, siendo $\mathbf{u} = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, y $\mathbf{w} \notin L\left(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\right)$.

11. $a = -1$ y $b = 11$.

12. $L(A) = L(B) = L\left(\{(1,0,-1),(0,1,1)\}\right) = S$, y $L(C) \neq S$ porque $(1,-1,0) \notin S$.

13. $B = \{(3,2,0,5),(0,2,9,-7),(0,0,3,-4)\}$.

14. Si $a = 0$: $\dim S = 1$ y $B = \{(1,1,1,1)\}$.
Si $a = -4$: $\dim S = 3$ y $B = \{(1,1,1,-3),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq -4$: $\dim S = 4$, es decir $S = \mathbb{R}^4$, y una base es la canónica.

15. $\dim M = 2$ y $B = \left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

16. (a) Sí, es un subespacio vectorial de dimensión 2 y base $\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}$.
(b) No es un subespacio vectorial.

17. Un sistema generadores y base es $\{(1,1,1,1,0),(1,-1,2,0,1)\}$. Su dimensión es 2.

18. La dimensión es 3, y la base $\left\{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

19. (b) $B_S = \{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ y $\mathbf{u} = (a,b,-a) = (a,b)_{B_S}$.
(c) $(-2,1,-1) = (-1,2)_{B_T}$

20. $S + T$: $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha + \gamma \\ x_4 = \alpha + \beta \end{array}\right.$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; $x_1 + x_2 - x_4 = 0$;
y $B_{S+T} = \{(1,0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$.
$S \cap T$: $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 3\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 2\alpha \end{array}\right.$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right.$; y $B_{S \cap T} = \{(3,-1,1,2)\}$.

21. (b) Representando $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, respecto de la base usual en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, entonces
$$S\colon \begin{cases} a_0 = \alpha - \beta + \gamma \\ a_1 = \alpha \\ a_2 = \beta \\ a_3 = \gamma \end{cases}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R};\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0;$$
y $B_S = \left\{(1,1,0,0) = 1 + x, (-1,0,1,0) = -1 + x^2, (1,0,0,1) = 1 + x^3\right\}$.
$$T\colon \begin{cases} a_0 = 2\beta \\ a_1 = \alpha + \beta \\ a_2 = \beta \\ a_3 = \alpha \end{cases}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \begin{cases} a_0 - 2a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases};$$
y $B_T = \left\{(0,1,0,1) = x + x^3, (2,1,1,0) = 2 + x + x^2\right\}$.
$$\text{(c) } S \cap T\colon \begin{cases} a_0 = 2\alpha \\ a_1 = 2\alpha \\ a_2 = \alpha \\ a_3 = \alpha \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R};\ \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_0 - 2a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases};$$
y $B_{S\cap T} = \left\{(2,2,1,1) = 2 + 2x + x^2 + x^3\right\}$.
$S + T = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

22. $\dim V_1 = 2$, y $B_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
$\dim V_2 = 3$, y $B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
$\dim(V_1 + V_2) = 4$, luego $V_1 + V_2 = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y una base es la usual.
$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, y $B_{V_1\cap V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

23. $\dim S = 2$, y $B_S = \{(1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}$.
$\dim T = 2$, y $B_T = \{(2,1,0,3), (-1,0,1,0)\}$.
$\dim(S + T) = 3$, y $B_{S+T} = \{(1,0,-1,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,2)\}$.
$\dim(S \cap T) = 1$, y $B_{S\cap T} = \{(1,0,-1,0)\}$.

24. $B_U = \{(1,0,-1,0,0),\ (0,1,2,1,-1)\}$.
$B_W = \{(1,-1,1,-1,1),\ (0,1,2,1,-1),\ (0,0,2,0,1)\}$.
$B_{U+W} = \{(1,0,-1,0,0),\ (0,1,2,1,-1),\ (0,0,1,0,0),\ (0,0,0,0,1)\}$.
$B_{U\cap W} = \{(0,1,2,1,-1)\}$.

25. $\dim U = 2$, y $B_U = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$.
$\dim W = 2$, y $B_W = \{(2,0,1), (0,1,1)\}$.
$\dim(U + W) = 3$, luego $U + W = \mathbb{R}^3$ y $B_{U+W} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
$\dim(U \cap W) = 1$, y $B_{U\cap W} = \{(2,-1,0)\}$.

26. $\dim S = 2$, $\dim T = 3$, y $\dim(S + T) = 3$, de donde $\dim(S \cap T) = 2$. Por lo tanto $S + T = T$ y $S \cap T = S$, es decir $S \subset T$.

27. $\mathbb{R}^3 = U \oplus V = V \oplus W$, y la suma $U + W$ no es directa.

28. $U = L(\{(0,0,1)\})$.

29. La suma $S_1 + S_2$ no es directa. $B_{S_1+S_2} = \{(1,0,1,0), (0,1,-2,2), (0,0,1,-1)\}$.

30. $a = -1$ y $b = 5$. $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$, con $T = L\left(\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}\right)$.

31. $W \subset V$, y $V = W \oplus U$ con $U = L\left(\left\{3x^2 - 2x^3\right\}\right)$.

32. (a) $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$ y $V + W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, luego V y W son suplementarios.
(b) $B_{W \cap T} = \left\{x^3\right\}$. Las ecuaciones implícitas de $V + T$ son $a = 0$.