Topología

Teoría de conjuntos

1. Sean A, B y C tres conjuntos. Demostrar las *leyes distributivas de la unión y la intersección*:
    a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
    b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. Sean A, B y C tres conjuntos. Demostrar las *leyes de DeMorgan*:
    a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
    b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
3. Formular y demostrar las leyes de DeMorgan para uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos.
4. Sea X un conjunto y $A, B \subset X$. Demosrar las siguientes afirmaciones:
    a) Si $A \subset B$ entonces $X \setminus B \subset X \setminus A$.
    b) Si $X \setminus B \subset X \setminus A$ entonces $B \cup X \setminus A = X$.
    c) Si $B \cup (X \setminus A) = X$ entonces $A \cap (X \setminus B) = 0$.
    d) Si $A \cap (X \setminus B) = \emptyset$ entonces $A \subset B$.
5. Sean A, B, C y D cuatro conjuntos. Demostrar las siguientes afirmaciones:
    a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
    b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
    c) $A \subset C$ y $B \subset D$ si y solo si $A \times B \subset C \times D$.
    d) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.
    e) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
    f) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
    g) $(A \times B) \setminus (C \times D) = [(A \setminus C) \times B] \cup [C \times (B \setminus D)]$.
6. Sea $f : A \longrightarrow B$, $A_0 \subset A$ y $B_0 \subset B$.
    a) Demostrar que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que la igualdad se satisface si f es inyectiva.
    b) Demostrar que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que la igualdad se satisface si f es sobreyectiva.
7. Sea $f : A \longrightarrow B$ y sean $A_i \subset A$ y $B_i \subset B$ para $i = 0, 1$. Demostrar las siguientes afirmaciones:
    a) Si $B_0 \subset B_1$ entonces $f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$.
    b) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.
    c) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$.
    d) $f^{-1}(B_0 \setminus B_1) = f^{-1}(B_0) \setminus f^{-1}(B_1)$.
    e) Si $A_0 \subset A_1$ entonces $f(A_0) \subset f(A_1)$.
    f) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$.
    g) $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$. Demostrar que si f es inyectiva se satisface la igualdad.
    h) $f(A_0 \setminus A_1) \supset f(A_0) \setminus f(A_1)$. Demostrar que si f es inyectiva se satisface la igualdad.

    Demostrar que los apartados b), c), f) y g) se cumplen para uniones e intersecciones arbitrarias.
8. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$. Si $C_0 \subset C$ demostrar que $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.