Topología

Espacios topológicos y bases

1. Sea X un conjunto. Demostrar que la familia
$$\tau_{CN} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito o numerable}\} \cup \{\emptyset\}$$
es una topología en X.

2. Encuentra todas las topologías en los conjuntos de 1, 2 y 3 elementos. ¿Existe alguna topología en el conjunto de tres elementos distinta de la discreta y de la indiscreta en la que los abiertos y los cerrados coincidan?

3. Sea X un conjunto y sea $a \in X$. Estudiar si las siguientes familias son topologías en X.
   a) $\tau_a = \{U \subset X \mid a \in U\} \cup \{\emptyset\}$.
   b) $\tau'_a = \{U \subset X \mid a \notin U\} \cup \{X\}$.
   c) $\tau''_a = \tau'_a \cup \{U \subset X \mid a \in U, X \setminus U \text{ es finito}\}$.
   d) $\tau_\infty = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es infinito}\} \cup \{\emptyset, X\}$.

4. Sea $\tau = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{G_k \mid k \in \mathbb{R}\}$ donde $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y + k\}$.
   a) Demostrar que τ es una topología en $\mathbb{R}^2$.
   b) Estudiar si τ es una topología en $\mathbb{R}^2$ si se sustituye $k \in \mathbb{R}$ por $k \in \mathbb{N}$.
   c) Estudiar si τ es una topología en $\mathbb{R}^2$ si se sustituye $k \in \mathbb{R}$ por $k \in \mathbb{Q}$.

5. Sea X un conjunto finito y τ una topología en X.
   a) Demostrar que la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es abierto.
   b) Dado $x \in X$ sea U_x el menor abierto que contiene a x, es decir, $U_x \subset U$ para todo abierto tal que $x \in U$. Demostrar que la relación $y \leq x$ si $y \in U_x$ es reflexiva y transitiva y, por tanto, un preorden en X.

6. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto X. Estudiar si la intersección $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología en X.

7. Encontrar dos topologías τ_1 y τ_2 sobre un conjunto X tales que $\tau_1 \cup \tau_2$ no es una topología. Encontrar la topología menos fina que contiene a τ_1 y τ_2.

8. Sea X un conjunto infinito y τ una topología en X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que τ es la topología discreta.

9. Sea en $\mathbb{R}^2$ la familia τ de todos los subconjuntos U tales que para cada $(x, y) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\}) \cup (\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)) \subset U$. Estudiar si τ es una topología en $\mathbb{R}^2$ y en caso afirmativo compararla con la topología usual.

10. En $\mathbb{R}^2$ consideremos la topología τ definida en el ejercicio anterior. Si llamamos
$$C((x, y), \varepsilon) = ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\}) \cup (\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)),$$
estudiar si el conjunto
$$\mathcal{B} = \{C((x, y), \varepsilon) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$$
es una base de τ.

11. (Plano de Moore) Sea $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0)\}$. Demostrar que la familia

$$\mathcal{B} = \{B((x,y),r) \mid y > 0, r \leq y\} \cup \{\{(x,0)\} \cup B((x,y),y) \mid y > 0\}$$

es base de una topología en Γ.

12. (Topología del orden) Sea X un conjunto totalmente ordenado y sean $a = \min X$ y $b = \max X$ en caso de existir. Demostrar que la familia

$$\mathcal{B} = \{[a,x) \mid x \in X \setminus \{a\}\} \cup \{(x,y) \mid x < y\} \cup \{(x,b] \mid x \in X \setminus \{b\}\}$$

es base de una topología en X.

13. Sea $K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{B}_u$ una base de la topología usual en $\mathbb{R}$. Demostrar que la familia

$$\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_u \cup \{B \setminus K \mid B \in \mathcal{B}_u\}$$

es base de una de topología en $\mathbb{R}$.

14. Demostrar que la familia $\mathcal{B} = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{Q}, p < q\}$ es una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.

15. Demostrar que la familia $\mathcal{B} = \{[p,q) \mid p,q \in \mathbb{Q}, p < q\}$ es una base de una topología en $\mathbb{R}$ distinta de la topología de Sorgenfrey τ_S. Comparar $\tau_{\mathcal{B}}$ y τ_S.

16. Considerar las siguientes familias de subconjuntos de $[0,1]$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(a,b) \mid 0 < a < b < 1\} \cup \{[0,1]\},\ \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \{\{0\},\{1\}\},$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(a,b) \mid 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{[0,1]\},\ \mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3 \cup \{\{0\},\{1\}\}$$

   a) Demostrar que son bases de una topología en $[0,1]$.

   b) Comparar las topologías generadas por estas bases.