Topología

Conexión

1. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   a) Si τ_1 es una topología en X más fina que τ entonces (X, τ_1) es conexo.

   b) Si τ_2 es una topología en X menos fina que τ entonces (X, τ_2) es conexo.

   c) Si $A \subset X$ es conexo entonces $\mathring{A}$ es conexo.

   d) Si $A \subset X$ es conexo entonces $\mathrm{Fr}(A)$ es conexo.

2. Estudiar la conexión de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología usual:

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ y = 1/x\}$

   b) $B = \{((1 - 1/t)\cos t, (1 - 1/t)\sin t) \mid t \geq 1\} \cup \{(\cos t, \sin t) \mid t \geq 1\}$.

3. Demostrar que en $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ los únicos subconjuntos conexos son los puntos y los subconjuntos infinitos.

4. Sea X un espacio topológico y C un subconjunto conexo de X. Demostrar que si A es un subconjunto de X tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ entonces $C \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.

5. Demostrar que un espacio topológico X es conexo si y solo si no existe ninguna aplicación continua y sobreyectiva $f : X \longrightarrow Y$ donde $Y = \{0, 1\}$ dotado de la topología discreta. Utilizar este hecho para demostrar que si A es un subconjunto conexo de X y $B \subset X$ es tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo.

6. Demostrar que si A y B son subconjuntos cerrados de un espacio topológico X tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B son conexos. Ilustrar con un ejemplo que el resultado no es cierto si A y B no son cerrados.

7. Demostrar que los siguientes subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ con la topología usual no son homeomorfos:

   a) $[0, 1]$ y $[0, 1)$.

   b) $[0, 1]$ y S^1.

   c) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

8. Determinar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ con la topología usual:

   a) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

   b) $B = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

   c) $C = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$.

9. Determinar las componentes conexas de $[-1, 1]$ dotado de la topología

$$\tau = \{U \subset X \mid 0 \notin U \text{ o } (-1, 1) \subset U\}.$$

10. Sea X un conjunto y A un subconjunto de X. Considerar en X la topología

$$\tau = \{U \subset X \mid A \subset U\} \cup \{\emptyset\}.$$

    Determinar las componentes conexas de X.

11. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y sobreyectiva. Supongamos que Y tiene n componentes conexas y demostrar que X tiene al menos n componentes conexas. Deducir que dos espacios homeomorfos tienen el mismo número de componentes conexas.

12. En $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología usual se considera el subespacio

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}.$$

Demostrar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow A$ es una aplicación continua y sobreyectiva, entonces $f^{-1}(\{(0, 0)\})$ contiene al menos tres puntos.

13. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se considera el subconjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Estudiar la existencia de aplicaciones:

a) $f_1 : A \longrightarrow S^1$ continua y sobreyectiva.
b) $f_2 : S^1 \longrightarrow A$ continua y sobreyectiva.
c) $f_3 : A \longrightarrow S^1$ continua y biyectiva.
d) $f_4 : S^1 \longrightarrow A$ continua y biyectiva.

14. Sea X un espacio topológico y A, B subconjuntos de X conexos por caminos. Demostrar que si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cup B$ es conexo por caminos.

15. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ dotado de la topología usual. Demostrar que U es conexo si y solo si U es conexo por caminos.

16. Sea X un espacio topológico y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos conexos (conexos por caminos) de X. Razonar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

a) Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es conexo (conexo por caminos).
b) Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es conexo (conexo por caminos).

17. Considerar en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros la topología τ dada por:

$$U \in \tau \Leftrightarrow x \in U,\ y \leq x \Rightarrow y \in U.$$

Determinar los subconjuntos conexos por caminos de $(\mathbb{Z}, \tau)$.

18. Determinar las componentes conexas por caminos de los siguientes espacios topológicos:

a) La recta se Sorgenfrey.
b) $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ con la topología usual.

19. Demostrar que si dos espacios topológicos X e Y son homeomorfos tienen el mismo número de componentes conexas por caminos.

20. Demostrar que si X e Y son espacios localmente conexos por caminos entonces $X \times Y$ es localmente conexo por caminos.