

VARIEDADES DIFERENCIABLES EN EL ESPACIO EUCLIDEO.

Formas diferenciales. Curso académico 2020-2021.

1. Sean $\omega \in \wedge^1(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Demostrar que en una referencia local $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ se verifica

$$X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]) = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu} (X^\mu Y^\nu - X^\nu Y^\mu)$$

y deducir que

$$X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]) = d\omega(X, Y).$$

2. En \mathbb{R}^2 se consideran los campos y formas siguientes:

$$X = (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + 1) \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = (y - 1) \frac{\partial}{\partial x} \\ \omega = (2xy + x^2 + 1) dx + (x^2 - y) dy.$$

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v, w) \mapsto (u - v, v^2 + w)$.

Determinar $[X, Y]_{(0,0)}$, $\omega(X)_{(0,0)}$ y $f^*\omega$.

3. Hallar la región del plano \mathbb{R}^2 en la cual las formas

$$\omega_1 = xdx + ydy, \quad \omega_2 = ydx + xdy$$

son linealmente independientes y hallar la referencia móvil $\{X, Y\}$ correspondiente.

4. Demostrar que la restricción a la esfera \mathbb{S}^3 de la forma

$$\omega = xdy - ydx + zdt - tdz$$

no es idénticamente nula.

[Indicación: Tener en cuenta la propiedad geométrica de los campos en la esfera.]

5. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ se define el operador L_X de la forma siguiente

$$L_X(f) = X(f), \quad L_X(Y) = [X, Y], \quad L_X(\omega) = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega),$$

donde $f \in \mathcal{F}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^r(M)$. Demostrar las siguientes propiedades:

(a) $[L_X, L_Y](f) = L_{[X, Y]}f, \quad \forall f \in \mathcal{F}(M)$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

6. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$, $\omega \in \Omega^1(M)$. Entonces

(a) $L_{fX}Y = fL_XY - df(Y)X$

(b) $L_{fX}\omega = fL_X\omega + \omega(X)df$

(c) $L_{fX}g = fL_Xg$.

7. Sea $\omega = xyz(dx + dy + dz) \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$.

(a) Hallar la condición para que

$$X \lrcorner d\omega = 0.$$

(b) ¿Puede tenerse simultáneamente

$$X \lrcorner \omega = X \lrcorner d\omega = 0?$$

8. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y en una referencia local $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ defínase $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$

$$\omega(X_1, \dots, X_{n-1}) := \det(X, X_1, \dots, X_{n-1})$$

(a) Demostrar que ω está bien definida y deducir su expresión local.

(b) Calcular $d\omega$ y dar una interpretación geométrica al resultado.

9. En la esfera \mathbb{S}^2 se consideran las proyecciones estereográficas $(U, \varphi_N = (u, v))$ y $(V, \varphi_S = (x, y))$ desde el polo norte y sur, respectivamente. Sea $\omega \in \Omega^1(U)$ dada por

$$\omega = \frac{u}{1 + u^2 + v^2} du \wedge dv$$

Hallar la expresión local de ω en la referencia local $(V, \varphi_S = (x, y))$.

10. Sea $A = (a^{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz y defínase $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ mediante la expresión

$$\omega = a^{ij} x_i dx_j$$

(a) determinar condiciones para que ω sea cerrada (esto es, $d\omega = 0$).

(b) ¿Existe alguna función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d\phi = \omega$?

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of light blue and orange geometric shapes, including a large blue triangle and an orange shape that looks like a stylized '9' or a drop.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**