VARIEDADES DIFERENCIABLES EN EL ESPACIO EUCLIDEO.
Grupos de matrices. Curso académico 2020-2021.

Se considera la siguiente familia de matrices 3×3

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}, \, x > 0 \right\}.$$

1. Demostrar que G es un grupo respecto a la composición de matrices y que la aplicación $\varphi : G \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ definida por

   $$\varphi(A) = (x, y, z, w)$$

   induce una estructura diferenciable en G. ¿Que dimensión tiene G como variedad?

2. Sea $j : G \to GL(4, \mathbb{R})$ la inyección canónica de G en el grupo lineal de las matrices inversibles 4×4. ¿Es G una subvariedad regular de $GL(4, \mathbb{R})$?

3. Sea $B = (x', y', w', z') \in G$ un elemento fijo. Se define la traslación $L_B(A)$ del elemento $A = (x, y, w, z)$ a la izquierda mediante

   $$L_B(A) = BA.$$

   Demostrar que L_B es un difeomorfismo de G y que existen cuatro campos de vectores X_1, X_2, X_3, X_4 independientes y tales que

   $$dL_B(X_i(e)) = X_i(L_B(e)), \; i = 1...4,$$

   donde e es el elemento neutro de G.

4. Si $\varphi_{X_i}(t)$ designa el flujo del campo X_i, determinar cuales de ellos conmutan. ¿Alguno de estos campos es completo?

5. Sea $A = \begin{pmatrix} x & y & w \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ un elemento genérico. Se define

   $$\Omega = A^{-1} dA = A^{-1} \left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial w} dw + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right).$$

   Demostrar que Ω es una matriz cuyas entradas son 1-formas diferenciales ω_i independientes.

6. Justificar que las formas ω_i anteriores son invariantes por L_B, es decir,

$$L_g^*\left((\omega_i)_g\right) = (\omega_i)_e\,,\ \forall g \in G.$$

Deducir que

$$\omega_i\,(X_j) = \delta_i^j.$$

7. Demostrar que $d^2 A = A\,(\Omega \wedge \Omega + d\Omega) = 0$ y deducir la expresión

$$\Omega \wedge \Omega + d\Omega = 0,$$

llamada ecuaciones de Maurer-Cartan de G. [Indicación: Utilizar las formas ω_i del apartado 5.].

8. Calcular directamente, utilizando el producto exterior, las diferenciales exteriores $d\omega_i$ de las formas ω_i. Deducir de ello que los campos X_i forman una distribución involutiva en G.

9. Demostrar que G admite una 4-forma $\Theta \in \Omega^4\,(G)$ que no se anula en ningún punto y que es invariante por traslaciones a la izquierda. Analizar si existe además una 1-forma $\theta \in \Omega^1\,(M)$ tal que

$$d\theta \wedge d\theta = \Theta.$$

10. Si $R_B : G \to G$ designa la aplicación

$$R_B\,(A) = AB$$

traslación a la derecha, donde B es un elemento fijo, calcular la forma $R_B^*\,(\Theta)$. Analizar si es invariante por traslaciones a la izquierda.

11. Para una base de campos invariantes a la izquierda (respectivamente derecha), determinar la aplicación exponencial.