Curso 2020–2021 **Grupo A**

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

1 PRELIMINARES

1. Propiedades algebraicas del cuerpo de los números reales.
2. Propiedades algebraicas del cuerpo de los números complejos.
3. Teorema fundamental del álgebra. Factorización de polinomios.
4. Sistemas de ecuaciones lineales. Método de eliminación de Gauss.
5. Matrices. Matriz transpuesta. Suma de matrices. Producto de un escalar por una matriz.
6. Producto de matrices. Matriz inversa.

2 ESPACIOS VECTORIALES

1. Definición y ejemplos de espacio vectorial. Combinaciones lineales.
2. Subespacios. Subespacio generado por un conjunto de vectores. Intersección y suma de subespacios.
3. Dependencia e independencia lineal.
4. Bases. Dimensión. Coordenadas. Cambio de base.
5. Suma directa de subespacios. Bases adaptadas a una suma directa.
6. Operaciones elementales en una familia ordenada de vectores.

3 APLICACIONES LINEALES, MATRICES Y DETERMINANTES

1. Definición y propiedades elementales de las aplicaciones lineales.
2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.
3. Aplicaciones lineales inyectivas, suprayectivas y biyectivas.
4. Matriz de una aplicación lineal. Cambio de bases.
5. El grupo de permutaciones.
6. Determinantes.

4 VALORES Y VECTORES PROPIOS

1. Valores y vectores propios. Teorema de independencia lineal.
2. Polinomio característico.
3. Subespacios propios. Multiplicidad algebraica y geométrica. Diagonalización.
4. Subespacios invariantes. Diagonalización por bloques.

5 PRODUCTO ESCALAR

1. Producto escalar. Norma. Distancia.
2. Identidad del paralelogramo. Polarización. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Desigualdad triangular.
3. Expresión del producto escalar en una base. Cambio de base.
4. Ortogonalidad. Bases ortonormales. Método de Gram-Schmidt.
5. Proyección ortogonal.

6 APLICACIONES LINEALES ENTRE ESPACIOS CON PRODUCTO ESCALAR

1. Adjunta de una aplicación lineal. Propiedades elementales. Representación matricial.
2. Operadores normales. Diagonalización de operadores normales.
3. Operadores autoadjuntos y unitarios en espacios vectoriales complejos.
4. Operadores simétricos y ortogonales en espacios vectoriales reales. Rotaciones.

7 FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

1. Formas bilineales y cuadráticas en espacios reales. Representación matricial. Cambio de base.
2. Reducción de formas cuadráticas a suma de cuadrados. Ley de inercia.
3. Formas cuadráticas reales factorizables.
4. Formas cuadráticas definidas positivas. Criterio de Sylvester.
5. Curvas de segundo grado.

BIBLIOGRAFÍA

1. Jorge Arvesú Carballo, Francisco Marcellán Español y Jorge Sánchez Ruiz
   Problemas Resueltos de Álgebra Lineal
   Thomson (2006).
   Capítulos 1 — 5 del programa.

2. Symour Lipschutz
   Álgebra Lineal (teoría y 600 problemas resueltos)
   Mac Graw-Hill (1970)
   Aconsejado para todo el curso.

3. Gilbert Strang
   Álgebra lineal y sus aplicaciones
   Thomson, (2007)
   Capítulos 1 — 6.

4. A. G. Kurosch
   Curso de Álgebra Superior
   Editorial Limusa S.A. De C.V., (1994)
   Capítulos 1,2 y 7.

5. Eugenio Hernández Rodríguez
   Álgebra y Geometría
   Addison-Wesley, (2001).
   Capítulo 7.

EJERCICIOS

TEMA 1

---

1 Exprese los siguientes números complejos en la forma $a+b\mathrm{i}$: (a) $(2+3\mathrm{i})+(4+\mathrm{i})$; (b) $(2+3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$; (c) $(2+3\mathrm{i})/(4+\mathrm{i})$; (d) $(2+3\mathrm{i})^3$; (e) $3\mathrm{i}^{30}-\mathrm{i}^{19})/(2\mathrm{i}-1)$; (f) $(1+\mathrm{i})^{25}$.

2 Calcule todos los valores de $(-8)^{1/3}$ y de $8^{1/3}$.

3 Resuelva la ecuación z^4+z^2+1

4 Halle los números reales x e y tales que $\frac{43+y\mathrm{i}}{x-5\mathrm{i}}=4+3\mathrm{i}$.

5 Halle el valor del número real a para que el cociente $z=\frac{3-2ai}{4-3\mathrm{i}}$ sea real, y calcule z para dicho valor de a.

6 Factorice los siguientes polinomios sobre el cuerpo de los números complejos: (a) $p(z)=2z^3-12z^2+22z-12$; (b) $p(z)=5z^5-50z^4+105z^3$; (c) $p(z)=3z^5-39z^3+108z$; (d) $p(z)=z^4-4z^3+6z^2-4z+1$; (e) $p(z)=3z^2+12$; (f) $p(z)=5z^3+10\mathrm{i}z^2-10z$; (h) $p(z)=-z^3+3z^2+13z-15$; (i) $p(z)=z^4-4z^3+16z-16$.

7 Un alumno se despierta al final de una clase de Álgebra, ve en la pizarra parcialmente borrada

$$p(z)=z^{20}-20z^{19}+\cdots+1$$

y oye decir al profesor: "...cuyas raíces son reales y positivas." ¿Cómo reconstruyó el alumno el polinomio completo y calculó sus raíces?

8 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a)

$$\begin{aligned}6x_1+4x_2+16x_3&=0\\2x_1+4x_2+8x_3&=0\\-2x_1-2x_2-6x_3&=0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3-3x_4&=1\\2x_1+3x_2-x_3+2x_4&=3\\2x_1+x_2-6x_3+x_4&=-1\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x_1+x_3&=3\\2x_1+x_2-x_3+x_4&=5\\2x_2-x_3+x_4&=-1\\-x_2-x_3&=-1\end{aligned}$$

(d)

$$-4x_1+2x_2-6x_3=1$$

9 Encuentre todos los valores de a y de b para los que el sistema

$$\begin{aligned}2x_1+x_2+x_3&=2a\\4x_1+2x_2+2x_3&=3a\\6x_1+2x_2+3x_3&=2b\end{aligned}$$

es compatible y calcule las soluciones correspondientes.

10 Sea la función
$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{37x^6 - 61x^5 + 13x^2 - 74x + 25}.$$
Calcule $f'''(1)$.

11 Sea
$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Calcule $F^T F$ y $F F^T$.

12 Sea
$$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
(a) Calcule $F^3 - 10F^2 + 31F - 30I$. (b) Calcule $(F^T)^3 - 10(F^T)^2 + 31F^T - 30I$. (c) Descomponga la matriz F como suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

13 Calcule las potencias F^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de las siguientes matrices:
$$\text{(a)} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \text{(c)} \quad F = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

14 Indique si existen las inversas de las siguientes matrices y en su caso calcúlelas:
$$\text{(a)} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \text{(c)} \quad H = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix}.$$

15 Sabiendo que
$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad G^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$
calcule: (a) $(FG)^{-1}$; (b) $(F^T)^{-1}$; (c) $(2F)^{-1}$.

TEMA 2

---

16 Calcule el rango r del siguiente conjunto de vectores y extraiga de entre ellos r vectores linealmente independientes: $\{(1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1), (-1,0,0,1)\} \subset \mathbf{R}^4$.

17 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$? (a) $V_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$; (b) $V_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$; (c) $V_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 = 0\}$; (d) $V_4 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 > 0\}$; (e) $V_5 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0\}$.

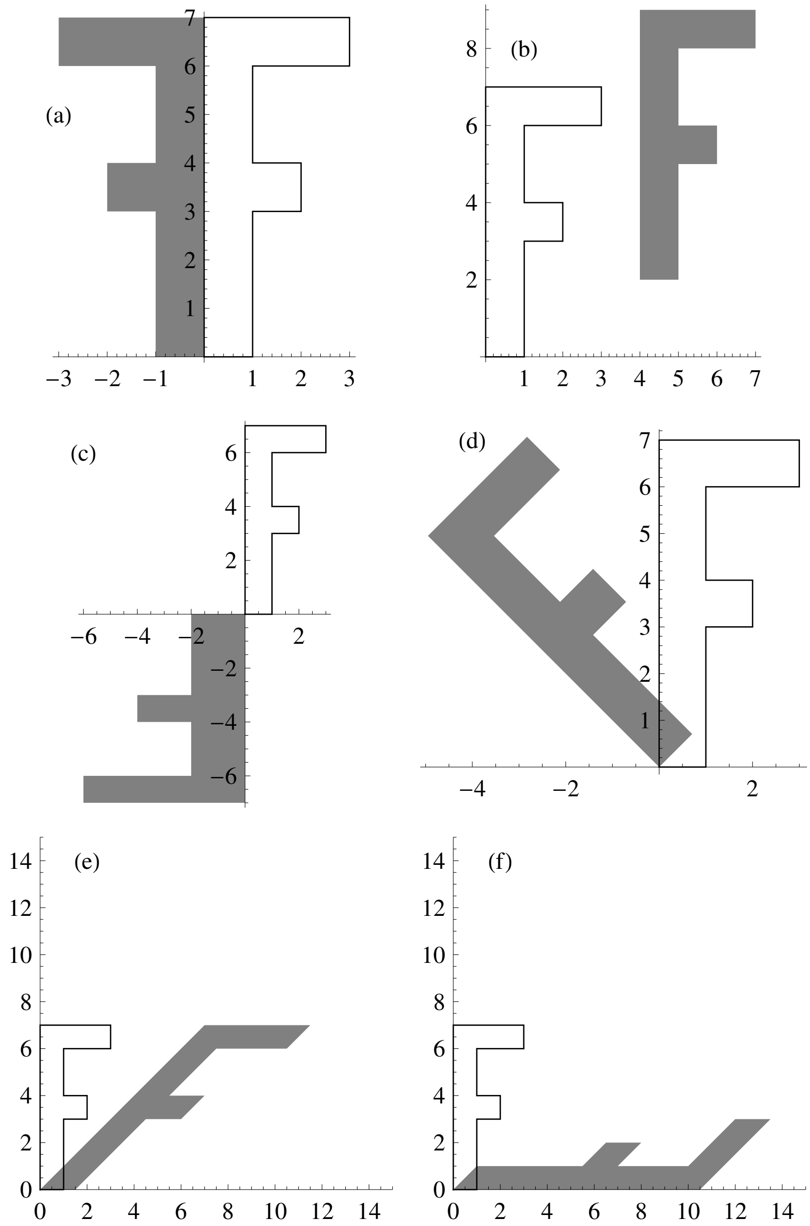
18 Encuentre una base de $V_1 + V_2$, donde:
$$\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{lin}\{\mathbf{x}_1 = (1,1,1,1),\ \mathbf{x}_2 = (1,1,-1,-1),\ \mathbf{x}_3 = (1,-1,1,-1),\ \mathbf{x}_4 = (3,1,1,-1)\}, \\ V_2 &= \operatorname{lin}\{\mathbf{y}_1 = (1,-1,-1,1),\ \mathbf{y}_2 = (2,-2,0,0),\ \mathbf{y}_3 = (3,-1,1,1)\}. \end{aligned}$$

19 Sean $\mathcal{V} = \{(1,1,0),\ (-1,1,1),\ (0,1,2)\}$ y $\hat{\mathcal{V}} = \{(2,1,1),\ (0,0,1),\ (-1,1,1)\}$. (a) Compruebe que $\mathcal{V}$ y $\hat{\mathcal{V}}$ son bases de $\mathbf{R}^3$; (b) Calcule directamente las coordenadas del vector $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ en la base $\mathcal{V}$; (c) Calcule directamente las coordenadas del vector $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ en la base $\hat{\mathcal{V}}$; (d) Calcule la matriz de cambio de base de $\mathcal{V}$ a $\hat{\mathcal{V}}$; y (e) Compruebe la relación entre las coordenadas mediante la matriz de cambio de base.

20 Sean $V_1 = \operatorname{lin}\{(1,1,5,2),\ (0,1,1,1),\ (2,3,11,5)\}$ y $V_2 = \operatorname{lin}\{(1,1,1,1),\ (2,-2,0,0),\ (3,-1,1,1)\}$. Demuestre que $\mathbf{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ y descomponga $(2,0,0,3)$ en suma de un vector de V_1 y un vector de V_2.

TEMA 3

21 Indique si las siguientes transformaciones que llevan de la letra F a la letra F sombreada son lineales, y si es así expréselas en forma matricial.



22 De una aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ se sabe que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) &= 4\mathbf{e}_3, \\ f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) &= 2\mathbf{e}_2, \\ f(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) &= 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

(a) Calcule la matriz F de la aplicación f en la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. (b) Calcule una base del núcleo de f. (c) Calcule una base de la imagen de f.

23 De un operador lineal $f \in L(\mathbf{R}^4)$ se sabe que $f(2,1,0,0) = (0,0,1,2)$, $f(1,-1,0,0) = (0,0,3,1)$, y que $\ker f = \operatorname{im} f$. Calcule la matriz F del operador f en la base canónica.

24 Sea $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1 = (5,3,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,-3,-2),\ \mathbf{v}_3 = (1,2,1)\}$ base de $\mathbf{R}^3$ y sea f el operador lineal en $\mathbf{R}^3$ definido por $f(\mathbf{v}_1) = (-2,1,0)$, $f(\mathbf{v}_2) = (-1,3,0)$, $f(\mathbf{v}_3) = (-2,-3,0)$. (a) Calcule la matriz de f en la base $\mathcal{V}$; (b) Calcule la matriz de cambio de la base $\mathcal{V}$ a la base estándar; y (c) Calcule la matriz de f en la base estándar.

25 ¿Puede tener el desarrollo de un determinante de orden 7 alguno de los términos siguientes? En caso afirmativo, indique con qué signo: (a) $a_{45}a_{71}a_{23}a_{67}a_{34}a_{12}a_{56}$; (b) $a_{23}a_{52}a_{77}a_{34}a_{61}a_{12}a_{45}$; y (c) $a_{71}a_{17}a_{26}a_{62}a_{53}a_{35}a_{44}$.

26 Calcule:

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

27 Calcule los siguientes determinantes (se recomienda reducirlos a una matriz triangular superior, mediante operaciones elementales):

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \text{(c)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

28 Calcule el siguiente determinante:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

29 ¿Por qué sabemos que son nulos (sin calcularlos) cada uno de estos cuatro determinantes?

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}; \qquad \text{(c)} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \sin^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \sin^2 c & 1 & \cos^2 c \end{vmatrix}; \qquad \text{(d)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

30 ¿Cuánto vale la derivada de un determinante cuyos elementos son funciones derivables de una variable?

31 Interprete geométricamente los menores de orden 2 de un determinante real de orden 3.

TEMA 4

---

32 Diagonalice, si es posible, las siguientes matrices:

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

33 Sea la matriz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Es diagonalizable considerada como $F \in \mathbf{R}^{3\times 3}$? ¿Es diagonalizable considerada como $F \in \mathbf{C}^{3\times 3}$?

34 Sean V un espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de V. De un operador lineal f en V se sabe que: (i) transforma al vector $6\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3$ en sí mismo; (ii) el subespacio $U = \{x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 \in V : 2x_1 + 11x_2 - 7x_3 = 0\}$ es propio de f; y (iii) la traza de la matriz F de f en la base $\mathcal{V}$ es igual a 5. Calcule los valores propios de f y la matriz F. ¿Estaría el problema determinado si, bajo las mismas condiciones, solamente supiésemos del subespacio U que es invariante?

TEMA 5

---

35 Encuentre una base ortonormal de cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbf{R}^4$:
(a) $\mathrm{lin}\{(1, 1, -1, -2), (-2, 1, 5, 11), (0, 3, 3, 7), (3, -3, -3, -9)\}$; y
(b) $V^\perp$, donde $V = \mathrm{lin}\{(1, 3, 0, 2), (3, 7, -1, 2), (2, 4, -1, 0)\}$.

36 Descomponga el vector $\mathbf{v} = (14, -3, -6, -7) \in \mathbf{R}^4$ en componentes paralela y perpendicular al subespacio $V = \mathrm{lin}\{(1, 1, -1, -1), (1, 4, 7, 2), (-3, 0, 7, 6)\}$.

37 ¿Qué vector del subespacio $V = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : 2x_1+x_2+x_3+3x_4 = 0, 3x_1+2x_2+2x_3+x_4 = 0, x_1+2x_2+2x_3-9x_4 = 0\}$ es la mejor aproximación a $(7, -4, -1, 2)$?

38 Considere el vector $\mathbf{x} = (5, 1, 5, 1)$ y los subespacios

$$V_1 = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\},$$

$$V_2 = \mathrm{lin}\{(2, 3, 0, 0), (3, 2, 0, 0)\}.$$

¿Qué ángulo forma la proyección ortogonal $\mathbf{x}_1$ del vector $\mathbf{x}$ sobre el subespacio V_1 con la proyección ortogonal $\mathbf{x}_2$ del mismo vector $\mathbf{x}$ sobre el subespacio V_2?

TEMA 6

---

39 Indique si la matriz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & i & 0 \\ -1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es normal, y en caso afirmativo calcule los proyectores ortogonales sobre cada uno de sus subespacios propios.

40 Sea

$$F = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encuentre una matriz unitaria U tal que U^+FU sea diagonal.

41 Demuestre que la matriz

$$F = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

corresponde a una rotación en $\mathbf{R}^3$ y calcule el eje de rotación y el ángulo de giro.

42 Calcule la matriz $R \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ que produce una rotación de ángulo $\theta = 2\pi/3$ en torno al eje $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y encuentre el transformado del punto $(-1, 1, \sqrt{6})$ bajo esta rotación. Ilustre su resultado con un dibujo.

43 Encuentre una matriz real de la que se sabe que $(1, 0, -1)$ es vector propio con valor propio 8 y $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$ son vectores propios con valor propio 6.

44 Sea

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre una matriz ortogonal P tal que P^tFP sea diagonal. (Ayuda: $\det(F - \lambda I) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 16\lambda - 16$.)

TEMA 7

45 Encuentre una base de $\mathbf{R}^3$ en la que la forma cuadrática

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

se reduzca a suma canónica de cuadrados. Escriba también la transformación de coordenadas $\hat{x} = P^{-1}x$ correspondiente.

46 Reduzca a suma de cuadrados la forma cuadrática en $\mathbf{R}^3$

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1)^2 - 4x_1x_2 + 6(x_2)^2 + 2x_2x_3 - (x_3)^2.$$

¿Existe algún producto escalar en $\mathbf{R}^3$ tal que Q sea su forma cuadrática asociada?

47 Calcule las siguientes integrales:
(a)

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(5x^2-4xy+5y^2)}dx\,dy, \qquad y \qquad \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(5x^2-4xy+5y^2-2x+3)}dx\,dy.$$

(b)

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+4x^2+9y^2)^2}.$$

(c)

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+5x^2-4xy+5y^2)^2}.$$

48 Estudie y dibuje las siguientes curvas: (a) $3x^2-2xy+3y^2+2x-4y+1=0$; (b) $5x^2+26xy+5y^2+68x+4y-100=0$; y (c) $x^2+2xy+y^2-7x-5y+10=0$.