

EJERCICIOS TEMA 1. MATRICES Y DETERMINANTES

Matrices

1. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

realizar, cuando sea posible, las siguientes operaciones:

$$i) (A_1 + A_2) \cdot A_3 \quad ii) A_1 - 2A_2 \quad iii) A_1/3 \quad iv) A_3 - 2A_3 \quad v) A_1 A_2$$

2. Realizar las operaciones indicadas con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$i) B \cdot A \quad ii) A \cdot C \quad iii) C \cdot D \quad iv) C \cdot B \quad v) C \cdot B + A$$

3. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

comprobar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

4. Hallar todas las matrices que conmutan con la matriz A :

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, hallar $A^2 + 3A - 10I$.

6. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 cuyos cuadrados sean igual a la matriz nula.

7. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 cuyos cuadrados sean igual a la matriz identidad.

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, hallar $X = \begin{pmatrix} x_1 & 2 \\ x_3 & -3 \end{pmatrix}$ para que se verifique $AX = XA$

Determinantes

9. Comprobar, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} -a & -4a & -3a \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} \sin^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \sin^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \sin^2 c & 1 & \cos^2 c \end{vmatrix}$$

10. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular $\det(A)$, $\det(B)$ y $\det(A^{-1}B)$.

11. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Calcular el determinante de las siguientes matrices reduciéndolas a matrices triangulares:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

13. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & b & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, con $|A| = ab + 2$, calcular los determinantes de las siguientes matrices, utilizando $|A|$ y las propiedades de los determinantes (especificar en cada caso que propiedad se usó):

$$\begin{aligned} a) A_1 &= \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & b) A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & b & 0 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} & c) A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix} \\ d) A_4 &= \begin{pmatrix} 3a & 2 & 0 \\ -3 & b & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & e) A_5 &= \begin{pmatrix} 3a & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 3b \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} & f) A_6 &= \begin{pmatrix} a+2 & 2 & 0 \\ -1+b & b & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ g) A_7 &= \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & b & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3 \end{aligned}$$

14. Hallar los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

15. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad (c) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

16. Hallar el valor de a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2a-2 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$ tenga:

i) rango 3 ii) rango 2 iii) rango 1

17. Determinar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro a :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Hallar el valor de a para que la matriz A sea invertible

$$a) A = \begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2a & a \end{pmatrix}$$

19. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ comprobar que:

i) C es la inversa de A ii) D es la inversa de B iii) $C + D$ NO es la inversa de $A + B$

20. Calcular, cuando se pueda, la inversa de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad c) C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuestiones

22. ¿Cuáles de las siguientes matrices podemos garantizar que sea igual a $(A + B)^2$?
- (i) $(B + A)^2$, (ii) $A^2 + 2AB + B^2$, (iii) $A(A + B) + B(A + B)$, (iv) $(A + B)(A + B)$,
 (v) $A^2 + AB + BA + B^2$
23. Justificar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
- a) Si $A, B \in M_{n \times n}$ son invertibles entonces $A + B$ y AB también lo son.
 b) Si $A, B \in M_{n \times n}$ entonces $(AB)^2 = A^2B^2$.
 c) Si $A \in M_{n \times n}$ es invertible entonces A^n también lo es y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
 d) Si $A \in M_{n \times n}$ entonces $AA^t + A^tA$ es una matriz simétrica.
24. Sea $A \in M_{n \times n}$ una matriz triangular. Calcular $\det(A)$. Si todos los elementos de la diagonal principal son positivos (es decir, $a_{ii} \geq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$) y $\text{tr}(A) = 0$ ¿cuánto valdrá $\det(A)$?
25. Sea $B \in M_{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Hallar una expresión para $\det(\lambda B)$ y comparar con $\lambda \det(B)$.
26. Si $A \in M_{n \times n}$ es una matriz triangular, ¿su adjunta será triangular?
27. Si A es una matriz tal que $A^4 = 0$, ¿puede ser A invertible?
28. Si una matriz A tiene inversa, demostrar que es única.
29. Si $A \in M_{n \times n}$ es una matriz invertible y $B \in M_{n \times n}$ es una matriz singular ¿ AB será una matriz singular o no singular? ¿y $A + B$?
30. Sean $A \in M_{m \times n}$ y $B \in M_{n \times p}$. Utilizando la siguiente propiedad de los rangos:
 $\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$, hallar cual sería el rango del producto de una matriz columna por una matriz fila.