

Tema 2 : Funciones de una variable real. Generalidades

1. Hallar el dominio y la imagen de la función

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 7$$

2. Hallar el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-5)(x+5)}$$

¿Existe $f(0)$? ¿ $0 \in \text{ran}(f)$?

3. Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

4. Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+1}$

5. Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

6. Hallar el dominio de la función $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{-x+3}\right)$

7. Sean las funciones $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2x^2 - 3$ y $h(x) = e^{-2x}$. Calcular $(f \circ g \circ h)(x)$ y $(g \circ f \circ h)(x)$

8. Sabiendo que $f(x-1) = \cosh(7x)$, calcular $f(x)$, $(f \circ f)(x)$ y $3f(-3x)$

9. Para las siguientes funciones hallar su dominio y comprobar si son invertibles. En caso de que lo sean, calcular su inversa:

(a) $f(x) = 3x + 1$

(b) $g(x) = -\frac{1}{x}$

(c) $h(x) = \log(x^2 + 3)$

(d) $j(x) = 3 - 5e^{2x}$

10. Calcular la inversa (si es posible) de las funciones:

$$f(x) = 1 + \sqrt{2+3x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$$

11. Suponemos que se conoce la gráfica de una función f . Escribir las ecuaciones para las gráficas asociadas a las siguientes transformaciones sobre f :

(a) Desplazamiento vertical 3 unidades hacia arriba

(b) Desplazamiento vertical 5 unidades hacia abajo

(c) Desplazamiento vertical 3 unidades hacia la derecha

- (d) Desplazamiento vertical 5 unidades hacia la izquierda
- (e) Reflexión especular respecto del eje x
- (f) Reflexión especular respecto del eje y
- (g) Alargamiento vertical por un factor 5
- (h) Compresión horizontal por un factor $\frac{1}{3}$

12. **En cada apartado calcular $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$ y $\frac{g}{f}$ y establecer sus dominios:**

(a) $f(x) = 3x^2 - 1$ y $g(x) = x^3 + 2x^2$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{3 - x}$

13. **Calcular $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, estableciendo sus dominios, en cada uno de los apartados:**

(a) $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2x + 1$

(b) $f(x) = x - 2$ y $g(x) = x^2 + 3x + 4$

(c) $f(x) = 1 - 3x$ y $g(x) = \cos(x)$

(d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$

(e) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ y $g(x) = \sin(2x)$

14. **Expresar las siguientes funciones de la forma $f \circ g$:**

(a) $h(x) = (2x + x^2)^4$

(b) $h(x) = \cos(x)^2$

(c) $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

(d) $h(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}$

(e) $h(t) = \sec(t^2) \tan(t^2)$

(f) $h(t) = \frac{\tan(t)}{1 + \tan(t)}$

15. **Sean f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + n_1$ y $g(x) = m_2x + n_2$. ¿Es $f \circ g$ una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?**

16. **Simplificar las siguientes expresiones:**

(a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

(b) $x(3x^2)^4$

(c) $\frac{(6y^3)^4}{2y^7}$

(d) $\frac{x^{2n}x^{3n-1}}{x^{n+2}}$

(e) $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}$

(f) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

- (g) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
- (h) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$
- (i) $\log(\log e^{e^{11}})$
- (j) $\log(a + b) + \log(a - b) - 2 \log c$
- (k) $\frac{1}{3} \log(x + 2)^3 + \frac{1}{2} [\log(x) - \log(x^2 + 3x + 2)^2]$

17. **Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:**

- (a) $e^{7-4x} = 0$
- (b) $\log(3x - 10) = 2$
- (c) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
- (d) $\log x + \log(x - 1) = 1$
- (e) $2^{x-5} = 3$
- (f) $e^{ax} = Ke^{bx}$, $a \neq b$, $K \in \mathbb{R}$

18. **Hallar el valor exacto de las siguientes expresiones:**

- (a) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- (b) $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- (c) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- (d) $\arccos(-1)$
- (e) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
- (f) $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$
- (g) $\operatorname{arcsec}(2)$
- (h) $\tan\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$