Temas 4 y 5: Derivabilidad de funciones. Polinomio de Taylor. Representación gráfica

1. **Hallar las derivadas de las siguientes funciones:**

   (a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

   (Sol: $\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$)

   (b) $g(x) = \frac{\arcsin(x)}{\log(x)}$

   (Sol: $\frac{-\frac{\arcsin(x)}{x}+\frac{\log(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\log^2(x)}$)

   (c) $h(x) = 3^{\arccos(\sqrt{1-x^4})}$

   (Sol: $\frac{3^{\arccos\left(\sqrt{1-x^4}\right)}x^3\log(9)}{\sqrt{x^4-x^8}}$)

   (d) $i(x) = \frac{2}{(\cos(x)+\sin(x))^2}$

   (Sol: $-\frac{4(\cos(x)-\sin(x))}{(\cos(x)+\sin(x))^3}$)

   (e) $j(x) = \frac{7}{13}\left(e^x+\log(x)\right)\left(e^x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{7}{9}}$

   (Sol: $\frac{7}{117}\frac{\frac{9(1+xe^x)^2}{x^2}+7\left(e^x-\frac{1}{x^2}\right)(e^x+\log(x))}{\left(e^x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{9}}}$)

   (f) $l(x) = \sqrt{7-\sqrt{7-x}}$

   (Sol:)

   (g) $m(x) = \sqrt{\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}}$

   (Sol:)

   (h) $n(x) = \frac{(x^2-9)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^3+1}}{(x^6-7x+1)e^x}$

   (Sol:)

2. **Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:**

   (a) $f(x) = x^{\frac{1}{9}}$

   (Sol: Derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$)

   (b) $g(x) = \arcsin(x)$

   (Sol: Derivable en $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$)

(c) $h(x) = |x^2 - 9|$

(Sol: Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$)

3. **Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones definidas a trozos:**

(a) $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 2 \\ e^{-x}, & x \geq 2 \end{cases}$

(Sol: Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$)

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

(Sol: Derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

4. **Estudiar la continuidad de f' en $x = 0$ donde la función f viene dada por**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

¿Es continua f'' en $x = 0$?

5. **Determinar los valores de a y b tales que f sea diferenciable en 2**

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 2 \\ 2x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

6. **Resolver los siguientes límites:**

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$

(Sol: $\frac{1}{6}$)

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sin(x) - \frac{e^x + \sin(x) - 1}{\log(x+1)}\right)$

(Sol: -2)

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{48e^x(1+\sin(x))(\sin(x)-x)}{(1+\sin(x)+\tan(x))(1+\sec(x))^3}$

(Sol: 0)

(d) $\lim_{x \to 0^+} (\sin(x))^x$

(Sol: 1)

(e) $\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$

(Sol: $\frac{1}{\sqrt{e}}$)

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1-2x)}{\sin(x)}$

(Sol: -2)

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{2\sin(x)}}{2x-2\sin(x)}$

(*Sol:* 1)

(h) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(*Sol:* e)

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^5}$

(*Sol:* ∞)

(j) $\lim_{x\to\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$

(*Sol:* $-\frac{e}{2}$)

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1+x}-1-x-x^2}{x^3}$

(*Sol:* $\frac{1}{2}$)

(l) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-1-\log(1+x)}{x^2}$

(*Sol:* $\frac{1}{2}$)

7. **Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva** $y = 2x^2 + 3$ **paralela a la recta** $8x - y + 3 = 0$

8. **Demostrar que no existe una recta tangente a la curva** $y = 4 - x^2$ **que pase por el punto** $(1, 2)$

9. **Obtener el polinomio de Taylor de las siguientes funciones:**

   (a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $x_0 = 1$, $n = 4$
   (b) $f(x) = \log(\cos(x))$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $n = 5$
   (c) $f(x) = \cosh(x) + \sinh(x)$, $x_0 = 0$, $n = 3$

10. **Calcular** $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ **con una exactitud de tres cifras decimales**

11. **Estimar el error que resulta cuando** $\frac{1}{\sqrt{x}}$ **se sustituye por** $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ **si** $0.99 < x < 1.01$

12. **Hacer uso del polinomio de McLaurin de la función**

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

para aproximar el valor de $\log(1.2)$ **con una exactitud de cuatro cifras decimales**

13. **Demostrar que si** $0 \le x \le \frac{1}{2}$**, entonces**

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + R_{3,0}(x)$$

donde $|R_{3,0}(x)| < \frac{1}{3840}$

14. **Demostrar que la aproximación**

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x$$

es exacta con dos cifras decimales si $-0.1 \leq x \leq 0$

15. **Hallar los valores de** a **y** b **tales que la función definida como**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b$$

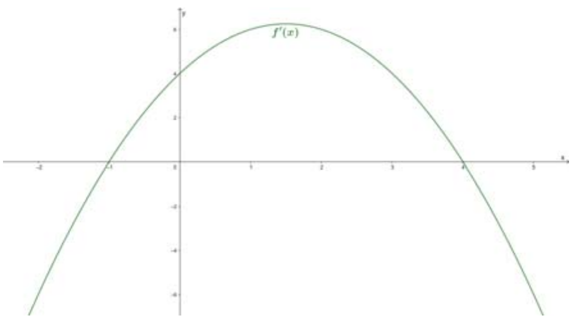
tiene un extremo relativo en el punto $(2, 3)$

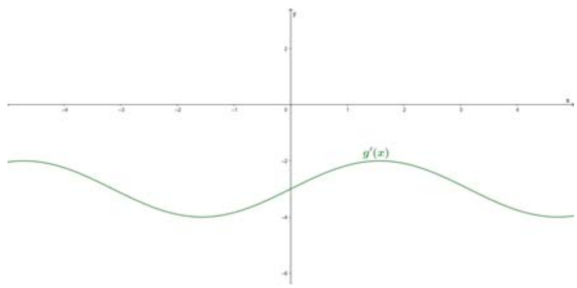
16. **Hallar los valores de** a**,** b **y** c **tales que la función**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

tenga un valor máximo relativo de 7 **en** $x = 1$ **y su gráfica pase por el punto** $(2, -2)$

17. **Para cada una de las funciones,** f **y** g**, se pide determinar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:**





(a) $f''(x)$ es una función decreciente
(b) $g(x)$ es una función decreciente
(c) $g(x)$ tiene un punto de inflexión
(d) $f(x)$ no tiene mínimo local
(e) $g(x)$ nunca se anula

18. **Sea la función**

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Determinar los valores de a**,** b**,** c**,** d **y** e **tales que:**

(a) f tenga un punto de inflexión en $x = 1$
(b) f contenga al origen
(c) f sea simétrica respecto del eje y

19. **Dibujar la gráfica de la función** f **teniendo en cuenta que satisface las siguientes propiedades:**

(a) f es no es diferenciable en -2 y 2.
(b) $f(x) < 0$ si $x < -2$
(c) $f(-2) = 0$
(d) $0 < f(x) < 3$ si $-2 < x < 2$
(e) $f(0) = 3$
(f) $f(2) = 0$
(g) $f(x) < 0$ si $x > 2$
(h) $f'_{+}(-2) = 1$
(i) $f'(0) = 0$
(j) $f'_{-}(2) = -1$
(k) $f'_{+}(2) = -2$
(l) $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -\infty$

20. **Dibujar la gráfica de la función f teniendo en cuenta que satisface las siguientes propiedades:**

(a) f es no es diferenciable en -1, 0 y 1.
(b) $\text{rang}(f) = \mathbb{R}$
(c) $f(-1) = 0$
(d) $f(0) = 1$
(e) $f(1) = 3$
(f) $f'_{-}(-1) = 1$
(g) $f'_{-}(1) = 0$
(h) $f'_{+}(-1) = 2$
(i) $f'_{+}(1) = 1$
(j) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$

21. Trazar la gráfica de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$
(b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+4}$
(c) $f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$