Temas 11 y 12 : Cálculo de primitivas. Integrales definidas

1. Resolver las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int x\tan^2(3x)\,dx$
(Sugerencia: integración por partes)
Sol: $\frac{x}{3}\tan(3x)+\frac{1}{9}\log|\cos(3x)|-\frac{x^2}{2}+k$

(b) $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=\sqrt{1-(x+1)^2}$)
Sol: $-\frac{\sqrt{1-(1+x)^2}}{3}(x^2+2x+3)+k$

(c) $\int e^x\cos(ax)\,dx$
(Sugerencia: integración por partes)
Sol: $\frac{e^x}{1+a^2}(\cos(ax)+a\sin(ax))+k$

(d) $\int\sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=\sqrt{\sqrt{x}+1}$)
Sol: $\frac{4}{15}\sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}(3\sqrt{x}-2)+k$

(e) $\int\sqrt{4+e^x}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=\sqrt{4+e^x}$)
Sol: $2\sqrt{4+e^x}+2\log\left|\frac{\sqrt{4+e^x}-2}{\sqrt{4+e^x}+2}\right|+k$

(f) $\int\frac{2x^2+5}{x^2(x-1)}\,dx$
(Sugerencia: descomposición en fracciones simples)
Sol: $-5\log|x|+\frac{5}{x}+7\log|x-1|+k$

(g) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=1-x^2$)
Sol: $-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{15}(2+3x^2)+k$

(h) $\int\cos^5(x)\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=\sin(x)$)
Sol: $\sin(x)-\frac{2}{3}\sin^3(x)+\frac{1}{5}\sin^5(x)+k$

(i) $\int\frac{1}{5+\sqrt{3x+2}}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=\sqrt{3x+2}$)
Sol: $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3x+2}-5\log\left|\sqrt{3x+2}+5\right|\right)+k$

(j) $\int\cos^3(x)\sin^2(x)\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=\sin(x)$)
Sol: $\frac{\sin^3(x)}{3}-\frac{\sin^5(x)}{5}+k$

(k) $\int\frac{4x^4-x^3-46x^2-20x+153}{x^3-2x^2-9x+18}\,dx$
(Sugerencia: descomposición en fracciones simples)
Sol: $2x^2+7x+5\log|x+3|+3\log|x-2|-4\log|x-3|+k$

(l) $\int\frac{e^{4x}}{e^{2x}+e^x+2}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=e^x$)
Sol: $\frac{e^{2x}}{2}-e^x-\frac{\log(e^{2x}+e^x+2)}{2}+\frac{\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}(e^x+\frac{1}{2})\right)}{\sqrt{7}}+k$

(m) $\int\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=1+x^2$)
Sol: $-\frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}+k$

(n) $\int x^2\sin(\sqrt{x^3})\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t^2=x^3$)
Sol: $-\frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{x^3}\right)+k$

(o) $\int(\log(x))^5\,dx$
(Sugerencia: integración por partes)
Sol: $x(\log|x|)^5-5x(\log|x|)^4+20x(\log|x|)^3-60x(\log|x|)^2+120x\log|x|+120x+k$

(p) $\int\sin(\log(x))\,dx$
(Sugerencia: integración por partes)
Sol: $\frac{x}{2}\left(\sin(\log|x|)-\cos(\log|x|)\right)+k$

(q) $\int\frac{1}{\cos^6(x)}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=\tan(x)$)
Sol: $\tan(x)+\frac{2}{3}(\tan(x))^3+\frac{1}{5}(\tan(x))^5+k$

(r) $\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}\,dx$
(Sugerencia: cambio de variable, $t=\sin(x)$)
Sol: $\frac{1}{\sin(x)}\left(1-\frac{1}{3(\sin(x))^2}\right)+k$

2. Resolver las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sec(x)\tan(x)\,dx$
Sol: No existe. La integral es divergente

(b) $\int_{\sqrt{3}}^{3} \left(\frac{x^5}{2} - \frac{1}{x^7}\right)\,dx$
Sol: $\frac{413021}{8748}$

(c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(3\sec^2(x) + \frac{\pi}{x^2}\right)\,dx$
Sol: $3(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1) + 4$

(d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{4}(\sin(x) + |\sin(x)|)\,dx$
Sol: $\frac{1}{2}$

(e) $\int_0^4 \left(2^{-\frac{x}{3}}6 - \frac{x}{4}\right)\,dx$
Sol: $\frac{18}{\log(2)}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) - 2$

(f) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec^2(x) + \cos(x)\right)\,dx$
Sol: $2 + \sqrt{2}$

3. Determinar el área neta con signo de la región comprendida entre la gráfica de f y el eje x:

(a) $f(x) = -2x^2 - x, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$
Sol: $\frac{1}{24}$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$
Sol: 0

(c) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x, \quad -1 \leq x \leq 1$
Sol: 0

(d) $f(x) = x^2 - 7x, \quad 0 \leq x \leq 7$
Sol: $-\frac{343}{6}$

4. Hallar el área de la región acotada por las gráficas de las funciones f y g:

(a) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = x + 1$
Sol: $2\sqrt{3}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 0$, $1 \leq x \leq 5$
Sol: $\frac{4}{5}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sec^2(x), & -\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0 \\ 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, $g(x) = 2$
Sol: $\frac{3\pi-2}{6}$

(d) $f(x) = 2 + \cos(x)$, $g(x) = 3$, $0 \leq x \leq \pi$
Sol: π

5. Calcular las siguientes derivadas:

(a) $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \sin(t)\,dt$
Sol: $\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

(b) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^6} \sqrt{t}\,dt$
Sol: $6x^8$ $(x > 0)$

(c) $\frac{d}{dx}\int_1^{x} \frac{1}{2t-1}\,dt$
Sol: $\frac{1}{2x-1}$

(d) $\frac{d}{dx}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\tan(x)} \operatorname{cosec}^2(t)\,dt$
Sol: $\operatorname{cosec}^2(\tan(x))\sec^2(x)$

6. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x}$
Sol: 1

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_5^{5+x} e^{t^2}\,dt}{x}$
Sol: e^{25}

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt}{x^3}$
Sol: $\frac{1}{3}$

7. Sea f la función definida de la forma

$$f(t) = \begin{cases} t, & t < 0 \\ 1+t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

(a) Determinar la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

(b) Esbozar la gráfica de F. ¿Dónde es F continua?

(c) ¿Dónde es F diferenciable? Calcular F'

8. Calcular las siguientes integrales impropias:

(a) $\int_0^1 \log(x)\,dx$
Sol: -1

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$
Sol: $\frac{\pi}{2}$

(c) $\int_2^\infty \frac{\log(x)}{x}\,dx$
Sol: ∞

(d) $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x}\,dx$
Sol: ∞

9. Demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi$$

(Sugerencia: emplear coordenadas polares, $x = r\cos(t),\ y = r\sin(t),\ \ (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$*)*