Problemas Tema 5:

1. Calcule los centros de masas de las siguientes figuras planas (con densidad uniforme):

(a) Un arco con forma de semicircunferencia de grosor despreciable y radio R (Ayuda: usar que la densidad lineal $\lambda = M/\pi R$, y $dm = \lambda R d\theta$).

(b) Una lámina homogénea y plana con forma de semicírculo de radio R (Ayuda: usar que la densidad superficial $\sigma = 2M/\pi R^2$, y $dm = \sigma r dr d\theta$)

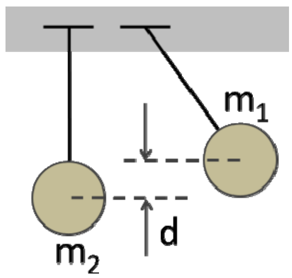
(c) Una lámina homogénea y plana con forma de cuadrante de radio R (un cuarto de círculo).

(d) Con el resultado del apartado anterior, utilizando los argumentos de simetría pertinentes, calcule de nuevo el centro de masas del apartado (b).

2. Calcule el centro de masas de un triángulo rectángulo cuyos catetos de 10 cm y 8 cm están situados sobre los ejes x e y respectivamente. A la vista de este resultado particular ¿Podría indicar a qué punto notable del triángulo (circuncentro, incentro, ortocentro o baricentro) corresponde el centro de masas? (Este es un resultado general para todos los triángulos).

3*. Una barra metálica tiene una longitud L, pero su densidad no es uniforme sino que varía acorde a la expresión $\lambda = \lambda_0(1+kx)$, donde x es la distancia entre un punto cualquiera de la barra y el extremo izquierdo donde la densidad es ρ_0, y k es una constante positiva. Calcule el centro de masas x_0 de dicha barra. Después calcule el valor de la constante k para diseñar la barra de forma que el centro de masa se encuentre en $x_0 = L/3$, $x_0 = L/2$, $x_0 = 5L/9$ y $x_0 = 8L/9$. ¿Es posible elegir el valor de la constante k para que el centro de masas esté donde se indica en cada caso? En caso de que no sea posible ¿Sabría indicar por qué? ¿Podría delimitar el rango de valores en donde sí se puede encontrar el centro de masas de la barra cuando se varía la constante k?

4. Si las masas de las bolas m_1 y m_2 de la figura son de 0.1 kg y 0.2 kg, respectivamente, y si m_1 se suelta cuando $d = 0.2$ m, encuentre la altura que alcanzan ambas masas después de chocar si la colisión es perfectamente inelástica. ($g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$).



5. Una naranja esférica de 0.34 kg y 2 cm de radio se deja caer desde la cima de un edificio de 35 m de altura. Tras chocar contra el suelo, la naranja queda completamente aplastada con un grosor de 0.5 cm. Despreciar efectos de rozamiento y suponer que la colisión es perfectamente inelástica. Calcular el tiempo que tarda la naranja en deformarse completamente y la fuerza media que ejerce el pavimento sobre la naranja.

6. Demuestre para el caso particular de un sistema formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 con velocidades v_1 y v_2 no nulas, que el momento lineal del sistema cuando se expresa con respecto al centro de masas es nulo independientemente de los valores de las masas y de las velocidades.

Las soluciones a los problemas 3 y 9 deberán ser entregados al comienzo de la clase del 28/10/2016.

7. En un cruce en ángulo recto (cuyas calles están orientadas según los cuatro puntos cardinales) colisionan dos vehículos que venían de direcciones perpendiculares. Por un lado un camión de 10000 kg de masa circulaba en dirección oeste-este a una velocidad de 72 km/h. Por otro lado un turismo de 1000 kg de masa viajaba a 144 km/h hacia el norte. Teniendo en cuenta que el choque no es elástico y después de la colisión ambos vehículos quedan juntos determine:
   (a) La velocidad que adquiere el conjunto después de la colisión.
   (b) La dirección a la que ambos vehículos salen proyectados.
   (c) La energía cinética que se pierde en el choque. ¿En qué se emplea esa energía?

8. Una bola de billar que se mueve con una velocidad de 4 m/s golpea de refilón a una segunda bola idéntica que se encontraba en reposo. Después del choque la velocidad de la primera bola se reduce a 2 m/s y sale despedida formando un ángulo de 60º con respecto a la dirección que llevaba originalmente. Calcule la velocidad y el ángulo (con respecto a la dirección en la que se movía la primera bola) con la que sale despedida la segunda bola. ¿Se trata de un choque elástico? ¿Por qué?

9*. Para un sistema de tres partículas tenemos que sus vectores de posición y sus masas son las siguientes: m_1 = 2 kg, $\boldsymbol{r}_1(t) = 3t\mathbf{i}+4\mathbf{j}$; m_2 = 12 kg, $\boldsymbol{r}_2(t)=(6+2t)\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$; y m_3 = 6 kg, $\boldsymbol{r}_3(t)= (t^2+t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$; donde t está en segundos y las posiciones instantáneas están expresadas en metros. Calcule, en función del tiempo, la posición y la velocidad del centro de masas. Particularice para el instante t = 3s.

10. El péndulo balístico es una herramienta de gran utilidad para determinar la velocidad a la que se disparan las balas de distintas armas de fuego. Consiste en un bloque de madera de tamaño considerable y masa *M* que cuelga de dos cables paralelos y verticales de longitud *L*. Para conocer la velocidad de un proyectil de masa *m* se dispara el arma apuntando al bloque (que está en reposo) de forma que la bala queda alojada en él. Para poder determinar la velocidad de la bala es necesario medir la elevación máxima que sufre el bloque *h* o el ángulo máximo θ<90º que forman los cables con respecto a la vertical. Haciendo uso de los principios de conservación oportunos deduzca dos expresiones para la velocidad del proyectil *v*, una en la que aparezca solo la elevación máxima *h* y otra en la que solo aparezcan el ángulo máximo θ y la longitud de la cuerda *L*.

11. Un vagón en forma de paralelepípedo cuya masa es de 1500 kg tiene un área superior de 2 m^2 y una capacidad de 3.5 m^3 se mueve por una vía horizontal sin rozamiento a una velocidad de 10 km/h. En un momento dado empieza a llover a razón de 0.1 ml s^{-1} cm^{-2}. Como el vagón está abierto por arriba empieza a llenarse de agua. En estas condiciones calcule:
   (a) El tiempo total, t_F, que transcurre desde que empieza a llover hasta que el vagón se llena completamente.
   (b) La velocidad que adquirirá el vagón una vez que se ha llenado de agua por completo.
   (c) La expresión de la velocidad en función del tiempo a partir del instante en el que empieza a llover (Recuerde que en este caso la masa es una función lineal del tiempo).
   (d) Haga una representación gráfica de la función del apartado anterior (Esto es representar la velocidad en frente al tiempo) y asegúrese de que es continua en t=0 y $t=t_F$.

**Las soluciones a los problemas 3 y 9 deberán ser entregados al comienzo de la clase del 28/10/2016.*