1. Sea $S: \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ definida por

$$S[p(x)] = p''(x) - 2x\,p'(x)$$

(a) Encuentre los autovalores y autovectores de S.

(b) Sea $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base estándar de $\mathbb{P}_3$. ¿Es $M_S^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ diagonalizable? En caso afirmativo, descomponga $M_S^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ de la forma $M_S^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = P^{-1}DP$ donde D es diagonal y P es una matriz con inversa.

Solución:

(a) Encontrar los autovalores y autovectors de S usando su forma explícita puede ser

Ojo: Los autovectores de S son polinomios.
Los autovectores de la matriz asociada M_S^B son las coordenadas respecto de la base B de los "autopolinomios" de S.

Fijamos la base estándar $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$ y calculamos $M_S^{\mathcal{E}}$.

$$M_S^{\mathcal{E}} = \left([S(1)]_{\mathcal{E}} \quad [S(x)]_{\mathcal{E}} \quad [S(x^2)]_{\mathcal{E}} \quad [S(x^3)]_{\mathcal{E}} \right)$$

$$= \left([0]_{\mathcal{E}} \quad [-2x]_{\mathcal{E}} \quad [2-4x^2]_{\mathcal{E}} \quad [6x-6x^3]_{\mathcal{E}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

▸ Autovalores: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -4$, $\lambda_4 = -6$.

Los autovalores son todos distintos, así que tenemos garantizada la diagonalización de $M_S^{\mathcal{E}}$.

Buscamos describir los espacios propios de $M_S^{\mathcal{E}}$ $(E_0, E_{-2}, E_{-4}, E_{-6})$. Recordamos que los autovectores de $M_S^{\mathcal{E}}$ son coordenadas de los autovectores de S.

$\lambda_1 = 0$: $\quad \mathrm{Nuc}(M_S^{\mathcal{E}} - 0 I_4) = \mathrm{Nuc}\, M_S^{\mathcal{E}}$

$$M_S^{\mathcal{E}} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $\text{Nuc}\, M_S^{\mathcal{E}} = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Gen}\{[1]_{\mathcal{E}}\}$

y $E_0 = \text{Gen}\{1\}$.

$\lambda_2 = -2$: $\text{Nuc}\,(M_S^{\mathcal{E}} + 2I_4)$

$$M_S^{\mathcal{E}} + 2I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Nuc}\,(M_S^{\mathcal{E}} + 2I_4) = \text{Gen}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \end{pmatrix} \right) = \text{Gen}\{[x]_{\mathcal{E}}\}$

$E_{-2} = \text{Gen}\{x\}.$

$\lambda_3 = -4: \quad \text{Nuc}(M_S^{\varepsilon} + 4I_4)$

$$M_S^{\varepsilon} + 4I_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nuc}(M_S^{\varepsilon} + 4I_4) = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Gen}\{[x^2 - 1/2]_{\varepsilon}\}$$

$E_{-4} = \text{Gen}\{x^2 - 1/2\}.$

$\lambda_4 = -6$: $\quad \mathrm{Nuc}(M_S^{\mathcal{E}} + 6I_4)$

$$M_S^{\mathcal{E}} + 6I_4 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Nuc}(M_S^{\mathcal{E}} + 6I_4) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Gen}\left\{ [x^3 - 3/2]_{\mathcal{E}} \right\}$$

$$E_{-6} = \mathrm{Gen}\left\{ x^3 - 3/2 \right\}.$$

(b) Como hemos mencionado en el apartado anterior, $M_S^{\mathcal{E}}$ es diagonalizable porque todos sus autovalores tienen multiplicidad 1.

Una descomposición $M_S^{\mathcal{E}} = P^{-1} D P$ se obtiene con

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ojo: Si escribimos $M_S^{\mathcal{E}} = P^{-1} D P$, entonces $P^{-1} = P$ (B es la base de autovectores).

2. Sea $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$. La matriz asociada a T respecto de la base estándar es

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

(a) Sin hacer cálculos, explique por qué T es diagonalizable.

(b) Diagonalice T.

Soluciones:

(a) Al ser M_T una matriz triangular superior, sus autovalores aparecen en la diagonal. Estos son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -4$, $\lambda_4 = -9$, $\lambda_5 = -16$.

(b) Buscamos bases para todos los espacios propios.

$\lambda_1=0$: $E_0 = Nuc(M_T - 0I_5) = Nuc\, M_T$

$$M_T \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_0 = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_2 = -1$: $E_{-1} = Nuc(M_T + I_5)$

$$M_T + I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_3 = -4$: $\quad E_{-4} = Nuc(M_T + 4I_5)$

$$M_T + 4I_5 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-4} = Gen\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_4 = -9$: $\quad E_{-9} = Nuc(M_T + 9I_5)$

$$M_T + 9I_5 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-9} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_5=-16$: $E_{-16}=Nuc(M_T+16I)$

$$M_T+16I_5=\begin{pmatrix} 16 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-16}=Gen\left\{\begin{pmatrix} 1/8 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto $D = P^{-1} M_T P$ donde

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Supongamos que $T(x) = A\bar{x}$ $(T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ es diagonalizable. Justifique las siguientes afirmaciones:

(a) A es invertible si y sólo si 0 no es un valor propio.

(b) Si λ es un valor propio de A, entonces λ^n es un valor propio de A^n.

(c) Si λ es un valor propio de A y A es invertible, entonces λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

Soluciones:

(a) Como A es diagonalizable, podemos

Vemos que

$$\det A = \det(P^{-1}DP) = \det D = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

y por tanto $\det A \neq 0$ (A es invertible) si y sólo si ningún autovalor es cero.

(b) Si A es diagonalizable, podemos escribir $A = P^{-1}DP$ donde D es diagonal con los autovalores de A.

Calculamos

$$A^n = \underbrace{A\,A\,A \cdots A}_{n \text{ veces}} = P^{-1}DP\,P^{-1}DP\,P^{-1}DP \cdots P^{-1}DP$$

$$= P^{-1}\underbrace{D\,D \cdots D}_{n \text{ veces}}P = P^{-1}D^nP$$

D^n es una matriz diagonal con λ_i^n en

(c) Utilizandos $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ tenemos

$$A^{-1} = (P^{-1} D P)^{-1} = P^{-1} D^{-1} (P^{-1})^{-1}$$
$$= P^{-1} D^{-1} P$$

D^{-1} es una matriz diagonal con λ_i^{-1} como entradas.

Como A es invertible, entonces ningún $\lambda_i \neq 0$ y por tanto todos los λ_i^{-1} existen.

4. Sea $T: V \to V$ una aplicación lineal donde $\dim V = 3$, cuya matriz asociada respecto a una base B es

$$M_T^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

T es diagonalizable si podemos encontrar una base de V compuesta totalmente de autovectores de T y esto, a su vez, es posible si la multiplicidad de cada autovalor sea igual a la dimensión de su espacio propio asociado.

Buscamos los autovalores de T. Al ser M_T^B una matriz triangular, sus autovalores aparecen en su diagonal.

Autovalores:

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 1

$\lambda_2 = 3$ con multiplicidad 3.

La diagonalizabilidad de T depende de la dimensión del espacio propio asociado a $\lambda_2 = 3$.

$$\dim E_3 = \dim \mathrm{Nuc}(M_T^B - 3I_3)$$

$$M_T^B - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 14+3a & a & 0 \end{pmatrix}$$

Ya que la primera columna es pivote independientemente del valor de a, vemos que $\dim \mathrm{Nuc}(M_T^B - 3I_3) = 2$ si y sólo si $a = 0$.

Es decir, $\dim E_3$ es igual a la multiplicidad