Teoría de la integral y de la medida (curso 2020-21)
Hoja n^0 3 *(Funciones medibles)* **SOLUCIONES**

1. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Se dice que un subconjunto $\gamma \neq \emptyset$ *es un átomo de* $\mathcal{A}$ si ningún conjunto δ tal que $\emptyset \neq \delta \subsetneqq \gamma$ pertenece al σ-álgebra $\mathcal{A}$.

   a) Comprobar que dos átomos $\gamma_1 \neq \gamma_2$ de $\mathcal{A}$ son siempre disjuntos.

   b) Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene k átomos y que X es su unión. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{A}$?

   c) Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ tiene una cantidad numerable de átomos y que, otra vez, X es su unión. ¿Qué cardinalidad tiene el σ-álgebra $\mathcal{A}$?

2. Sea $\mathcal{A}$ la σ álgebra formada por $\{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0] \\ 1, & \text{si} \quad x \in (0, 1] \\ 2, & \text{si} \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$
   ¿Es f medible? **SOL**: NO, $f^{-1}\{1\} = (0, 1] \notin \mathcal{A}$.
   ¿Cómo son en general las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$? **SOL**: Constantes en $(-\infty, 0]$ y en $(0, \infty)$.

3. Sea $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$ una función medible no-negativa, μ una medida σ -finita en $\mathcal{A}$. Probar que $f(x) = \lim t_n(x)$ siendo $\{t_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas, tales que t_n toma valores distintos de cero solamente en un conjunto de medida finita.

   Sugerencia: Construir $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_n \subset \ldots$, donde $\mu(\mathcal{B}_n\} < \infty$, tomar $t_n = s_n \chi_{\mathcal{B}n}$, siendo s_n una sucesión creciente de funciones simples no-negativas con límite f.

4. Probar que si $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ verifica que $f^{-1}((r, \infty])$ es medible para todo $r \in \mathbf{Q}$, entonces f es medible. (El resultado es cierto en general si $r \in A$, con A denso en $\mathbb{R}$).

   SOL: Basta ver que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $f^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q}:\, r > a\}} f^{-1}((r, \infty])$ (unión numerable de medibles)

5. Dadas funciones medibles $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, demostrar que $f + g$ y $f \cdot g$ son medibles.

   SOL: Para la función $f + g$, aplicar la indicación de los apuntes de F. Soria. Para la función $f \cdot g$, considerar por separado los subconjuntos de X donde las funciones f, g tienen un determinado signo.

6. Para funciones $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
   a) $|\, f \,|$ medible $\Rightarrow f$ medible. **SOL**: NO, si D es un conjunto no medible entonces $F = \chi_D - \chi_{D^c}$ no es medible pero $|F| = 1$ sí lo es.
   b) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible. **SOL**: NO; basta tomar f_1 no medible y $f_2 = -f_1$.
   c) $f_1.f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible **SOL**: NO; tomamos $f_1 = f_2 = F$, con F como en a)
   d) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible **SOL**: NO
   d) $f_1 - f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible **SOL**: NO

7. Si $f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $n = 1, 2, \dots$, son medibles, probar que el conjunto $A = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$ es un elemento de $\mathcal{A}$. **SOL**: visto en clase. Sabemos que tanto $g(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ como $h(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ son medibles. Ahora, es fácil ver que A es el conjunto donde $g(x) = h(x)$, es decir, $A = (g - h)^{-1}(0)$ y por tanto es medible.

8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean X_1 X_2 dos **variables aleatorias** sobre él, (i.e., dos funciones medibles de $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$) y sean F_{X_1} , F_{X_2} las **funciones de distribución** de las medidas de probabilidad inducidas por X_1, X_2 respectivamente ($F_{X_j}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \le x\}$, j=1,2). Probar que si $P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\} = 1$ entonces $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

   SOL: Para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, los conjuntos $A_j = \{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \le x\}, j = 1, 2$ cumplen $P(A_1 \setminus A_2) = 0$ y $P(A_2 \setminus A_1) = 0$.

9. Consideramos el espacio de probabilidad $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), P)$ siendo $P(n) = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$ Definimos $X : \mathbf{N} \to \{0, 1, \dots k - 1\}$ mediante $X(n) =$ resto de n (modulo k), ($k \in \mathbf{N}$, fijo). Sea P^* la probabilidad inducida por X (ver ejercicio 14, Hoja 2) . Calcular $P^*(r), \quad 0 \le r \le k - 1$.

   SOL: Se tiene, por definición,

$$P^*(r) = P(X^{-1}\{r\}) = P(\{r + nk : n = 0, 1, 2, \dots\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r+nk}} = \frac{2^{-r}}{1 - 2^{-k}}, \quad \text{si } r \neq 0$$

$$P^*(0) = P(X^{-1}\{0\}) = P(\{nk : n = 1, 2, \dots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nk}} = \frac{2^{-k}}{1 - 2^{-k}}$$

10. Se considera el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$, donde $P(A) = \int_A f(x)dx$ viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [0, 1] \end{cases}$$

   Sea $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ definida mediante

$$X(x) = \begin{cases} -2\log x, & \text{si} \quad x > 0 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

   Hallar F_X, la función de distribución de la probabilidad inducida por X.

   SOL: Se tiene, por definición,

$$F_X(y) = P(\{x \in \mathbb{R} : X(x) \le y\}) = P(\{x \in [0, 1] : -2\log x \le y\}) = P(\{x \in [0, 1] : x \ge e^{-y/2}\}).$$

   Ahora bien, se tiene

$$\{x \in [0, 1] : x \ge e^{-y/2}\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si} \quad y < 0 \\ [e^{-y/2}, 1], & \text{si} \quad y \ge 0. \end{cases}$$

   Por tanto,

$$F_X(y) = P(\{x \in [0, 1] : x \ge e^{-y/2}\}) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad y < 0 \\ \displaystyle\int_{e^{-y/2}}^{1} 1\, dx = 1 - e^{-y/2}, & \text{si} \quad y \ge 0. \end{cases}$$

11. Sea $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}^+$ definida mediante $f(x)=0$, si x es racional, $f(x)=n$, si n es el número de ceros inmediatamente después del punto decimal en la representación de x en la escala decimal. Calcular $\int f(x)dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

SOL: Por la definición que nos dan, se tiene que $f(x)=n$ en el conjunto $I_n=(10^{-n-1},\,10^{-n}]\cap\mathbb{Q}^c$. De esta forma podemos escribir $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,\chi_{I_n}(x)$. Usando que la medida de Lebesgue de I_n es la misma que la del intervalo $\tilde{I}_n=(10^{-n-1},\,10^{-n}]$, es decir, $9/10^{n+1}$ su integral es

$$\int f\,dm=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{9}{10^{n+1}}=\frac{9}{10}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{10^n}=\frac{9}{10}\frac{1/10}{(1-1/10)^2}=\frac{9}{9^2}=\frac{1}{9}.$$

12. Sea $f(x)$ la función definida en $(0,1)$ mediante $f(x)=0$, si x es racional, $f(x)=[\frac{1}{x}]$ si x es irracional ($[\frac{1}{x}]$ es la parte entera de $\frac{1}{x}$). Calcular $\int f(x)dm$ siendo m la medida de Lebesgue.

SOL: Observamos primero que $[y]\geq y-1$. Como el conjunto de números racionales tiene medida 0 con respecto a la medida de Lebesgue, se sigue que $f(x)\geq\frac{1}{x}-1$ c.t.p. Por tanto $\int f dm\geq\int_0^1\left(\frac{1}{x}-1\right)dx=\infty$.

13. Comprobar $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dm=\infty$, siendo m la medida de Lebesgue.

14. Sea $f_n(x)=\min(f(x),n)$ siendo $f(x)\geq 0$ y medible. Demostrar que $\int f_n d\mu\uparrow\int f d\mu$.

SOL: Basta observar que $\{f_n\}_n$ es una sucesión creciente de funciones medibles y que $\lim f_n(x)=f(x)$ puntualmente $\forall x$. A continuación se usa el TCM.

15. Sean $f_n(x)$ funciones medible no negativas y acotadas. Supongamos que $f_n(x)\downarrow f(x)$ y que para algún k se verifica $\int f_k d\mu<\infty$. Probar que (**TCM para sucesiones decrecientes**):

$$\lim\int f_n d\mu=\int f d\mu.$$

(Sugerencia: Formar la sucesión $g_n=f_k-f_{k+n}$).

SOL: La sucesión $\{g_n\}_n$ es creciente y cumple $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=f_k(x)-f(x),\forall x$. Por el TCM,

$$\int f_k d\mu-\int f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int(f_k-f_{k+n})d\mu=\int f_k d\mu-\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Despejando queda el resultado.

16. Sea $1=a_1\geq a_2\geq a_3,\ldots,\geq a_n,\ldots,$ una sucesión de números positivos tales que $\lim a_n=0$. Sea $f_n(x)=a_n/x,\quad x>a>0$. Comprobar que f_n decrece a cero uniformemente pero $\int f_n dm=\infty$ para $\forall n$.

17. Sea $f_n:[0,1]\to[0,\infty)$, definida mediante

$$f_n(x)=n,\text{ si } 0<x<\tfrac{1}{n}$$
$$f_n(x)=0,\text{ en otro caso.}$$

Comprobar que $f_n\to 0$, puntualmente pero $\int f_n dm=1$.