Teoría de la integral y de la medida (curso 2020-21)
Hoja n^0 4 *(Integración y teoremas de convergencia, continuación)* **SOLUCIONES**

1. Sea $f(x) = 0$ en cada punto del conjunto ternario de Cantor en [0,1]. Sea $f(x) = p$ en cada intervalo del complementario de longitud $\frac{1}{3^p}$. Demostrar que f es medible y calcular $\int f(x)dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

   SOL: El complementario del conjunto de Cantor en $[0,1]$ viene dado por un abierto de la forma $\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{p-1}} I_{p,k}$, donde los $I_{p,k}$ son intervalos abiertos disjuntos cada uno de medida 3^{-p}. La función f se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{p-1}} p\,\chi_{I_{p,k}}(x),$$

   y su integral vale por tanto

$$\int f dm = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{p-1}} p\, m(I_{p,k}) = \sum_{p=1}^{\infty} p\frac{2^{p-1}}{3^p} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} p\left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{1}{2}\frac{2/3}{(1-2/3)^2} = 3.$$

---

2. Llamemos $d_i(x)$ a los dígitos del desarrollo decimal $0.d_1d_2...$ de un $x \in (0,1)$. Decir por qué son convergentes las siguientes series:

$$f(x) = \sum_i d_i(x)/2^i \quad g(x) = \sum_i (-1)^{d_i(x)}/2^i,$$

   y hallar $\int_0^1 f$, $\int_0^1 g$, expresándolas como sumas de series. ¿Por qué son válidas esas expresiones?

   SOL: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{9}{2}$ y $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 0$, que ya veremos con calma ...

---

3. Sea $f_{2n-1} = \chi_{[0,1]}$ $\quad f_{2n} = \chi_{(1,2]}$ $n = 1, 2, \ldots$ Comprobar que se verifica la desigualdad de Fatou estrictamente.

   SOL: $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ porque $f_n(x) = 0$ bien si n es par o bien si n es impar. Por tanto $\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0 < \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = 1.$

---

4. Sean $f \geq 0$, $g \geq 0$ medibles $f \geq g$, $\int g d\mu < \infty$. Probar que

$$\int f d\mu - \int g d\mu = \int (f-g) d\mu$$

---

5. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida. Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles de X a $[-\infty, +\infty]$:

$$f_1(x) \leq f_1(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \ldots .$$

   Ponemos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in (-\infty, +\infty]$.

a) Demostrar que $\lim_n \int f_n(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu$ si f_1 es integrable.

b) Dar un ejemplo, cuando $\int f_n(x)\, d\mu = -\infty$ para todo n, mientras que $\int f(x)\, d\mu = 0$. Demostrar que $\lim_n \int f_n(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu$.

SOL: a) Aplicar el TCM a funciones $f_n - f_1 \geq 0$. b) $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, f_n son funciones constantes: $f_n(x) = -1/n$, $x \in \mathbb{R}$.

---

6. Sea $f_n \geq 0$, medible, $\lim f_n = f$, $f_n \leq f \quad \forall n$. Comprobar que $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$. (Sugerencia: Usar el lema de Fatou y que $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$)

   SOL: Por el Lema de Fatou y las hipótesis, $\displaystyle\int f d\mu = \int \lim f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$

---

7. Sea $g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$ integrable. Sea $\{E_n\}$ uns sucesión decreciente de conjuntos tal que $\cap_1^\infty E_n = \emptyset$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g d\mu = 0$

   SOL: Usar TCD con $f_n = g\chi_{E_n}$ y función dominante $F = |g|$.

---

8. Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ medible y $f \in L^1(m)$. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dm$. Probar que $F(x)$ es continua. (Sugerencia: Usar teoremas de convergencia)

   Probar que dados $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ números reales, se tiene
$$\sum_k |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| dm.$$

   SOL: La continuidad se deduce del TCD de la forma siguiente: fijamos x y elegimos $\{z_n\}_n$ una sucesión convergente a x, supongamos además que $z_n < x, \forall n$. Definimos $f_n(y) = f(y)\chi_{(z_n,x)}(y)$ (es decir, $f_n(y) = f(y)$ si $z_n < y < x$ y $f_n(y) = 0$ en el resto. Entonces
$$\lim_{n\to\infty} |F(z_n) - F(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \int_{z_n}^x |f| dm = \lim_{n\to\infty} \int |f_n| dm = 0,$$
   porque $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = 0, \forall y$ y las f_n están dominadas por la función integrable $|f|$.

---

9. Sea $\mu(X) < \infty$. Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^1(\mu)$, con $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente. Demostrar que $f \in L^1(\mu)$ y que $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. (Sugerencia: Estudiar la sucesión $\varepsilon_n(x) = f_n(x) - f(x)$, escribir $f(x) = f_n(x) - (f_n(x) - f(x))$.

---

10. Sea $A = [0, 1] \cap \mathbf{Q}$, entonces $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$. Definimos $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mediante: $f_n(x) = 1$ si $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $f_n(x) = 0$ en los demás casos. Probar que f_n es integrable Riemann, hallar $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y estudiar si $f(x)$ es integrable Riemann.

    SOL: f es la función de Dirichlet, luego no es integrable Riemann.

---

11. Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + \frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}} = 1.$

    Sugerencia: Usar que para $n > 1$ $(1 + \frac{x}{n})^n \geq \frac{x^2}{4}$.

    SOL: Definimos $f_n(x) = \dfrac{1}{(1 + \frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}}$. Se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}, \forall x > 0$. Sea por otro lado
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/2}} & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{4}{x^2} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Entonces, F es integrable y $f_n(x) \leq F(x)$, si $n \geq 2$. Por el TCD, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$.

---

12. Sea $f_n(x) = \dfrac{nx - 1}{(x \log n + 1)(1 + nx^2 \log n)}$, $x \in (0, 1]$. Comprobar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y sin embargo $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$.
(Sugerencia: $f_n(x) = \frac{-1}{x \log n + 1} + \frac{nx}{(n \log n)x^2 + 1}$).

SOL: Con la sugerencia, podemos encontrar una primitiva de forma directa que nos da

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log[(n\log n)x^2 + 1]}{2 \log n} - \frac{\log(x \log n + 1)}{\log n} \right) \Bigg|_0^1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log[(n\log n) + 1]}{2 \log n} - \frac{\log(\log n + 1)}{\log n} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esto no contradice el TCD porque no existe función "dominante" que permita usarlo.

---

13. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^\infty \frac{n}{1 + n^2x^2} dx$, estudiando los casos $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.
¿ Qué teoremas de convergencia son aplicables ? **SOL**: Sea $f_n(x) = \dfrac{n}{1 + n^2x^2}$. Se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x > 0$. Definimos $F(x) = \frac{1}{x^2}$. Entonces, F es integrable en (a, ∞) si $a > 0$ y $f_n(x) \leq F(x)$, $\forall n$. Por el TCD, $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^\infty f_n dx = 0$ si $a > 0$.

Sin embargo, dado cualquier $\epsilon > 0$ el cambio de variable $y = nx$ nos da

$$\int_0^\epsilon \frac{n}{1 + n^2x^2} dx = \int_0^{n\epsilon} \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan(n\epsilon) \longrightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Por simetría, lo mismo ocurre en $(-\epsilon, 0)$. Por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty f_n dx = \frac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^\infty f_n dx = \pi$, si $a < 0$.

---

14. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx$.

SOL: Sea $f_n(x) = \dfrac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n}$. Se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x > 0$. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{4}{x^2} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

Entonces, F es integrable y $f_n(x) \leq F(x)$, si $n \geq 2$ (porque, por el desarrollo del binomio de Newton, $(1 + x^2)^n \geq 1 + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2} x^4$). Por el TCD, $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty f_n dx = 0$.

---

15. En cada uno de los siguientes casos, demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$.

(a) $f_n(x) = \dfrac{nx \log x}{1 + n^2x^2}$; (b) $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x^2}$;

(c) $f_n(x) = \dfrac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2}$; (d) $f_n(x) = \dfrac{n^p x^r \log x}{1 + n^2x^2}$, $r > 0$, $p < \min(2, 1 + r)$.

SOL: a) TCD, usando que $\frac{nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2}$, para $x, n \in \mathbb{R}$;
d) Supongamos que $p < 2$. Para aplicar TCD, ponemos $y = n$ y le damos todos los valores reales en $(0, \infty)$. Aplicando el Cálculo, vemos que

$$\sup_{y>0} \frac{y^p}{1+y^2x^2} \le C(p)x^{-p}$$

(se alcanza en $y = \sqrt{\frac{p}{2+p}}\, x^{-1}$). Luego $f_n(x) \le g(x) := C(p)x^{-p+r} \log(x)$, y esta función mayorante es integrable si $p < \min(2, 1+r)$. Los apartados b) y c) se hacen de la misma forma.

---

16. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$.

SOL: Utilizando la versión de TCM para series, obtenemos que

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (\log x)^2\,(n+1)x^n\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)^3}\,.$$

La última igualdad se obtiene integrando por partes dos veces.