
Teoría de la integral y de la medida, 2020-21
Hoja nº 7 (*medidas y σ -álgebras producto, medidas inducidas, el Teorema de Fubini*)

1.- Sea ν la medida definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por medio de

$$\nu(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z}^2) \quad \text{para todo } A \subset \mathbb{R}^2.$$

Es decir, ν es la medida que “cuenta” el número de puntos de coordenadas enteras que hay en un conjunto. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Si ν_ϕ es la medida inducida por ν y ϕ en $\mathbb{R}$, calcular $\nu_\phi([1, e])$ y $\nu_\phi((e^2, e^3])$.

Solución. Por definición, $\nu_\phi([1, e]) = \nu(\{(x, y) : \phi(x, y) \in [1, e]\})$, es decir,

$$\begin{aligned} \nu_\phi([1, e]) &= \nu(\{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}) \\ &= \text{número de puntos de coordenadas enteras en el disco unidad} = 5. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \nu_\phi((e^2, e^3]) &= \nu(\{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 \leq 3\}) = \nu(\{(x, y) : \sqrt{2} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{3}\}) \\ &= \text{número de puntos de coordenadas enteras en el anillo exterior al disco cerrado de} \\ &\quad \text{radio } \sqrt{2} \text{ e interior al disco cerrado de radio } \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Este conjunto es el vacío (porque los puntos relevantes son $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 2)$, $(\pm 2, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$ y todos están fuera de ese anillo). Por tanto $\nu_\phi((e^2, e^3]) = 0$.

2.- Si consideramos en $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ la medida de área de Lebesgue habitual, m , y si $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, o $\varphi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, demostrar que las medidas inducidas m_φ son medidas de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ y encontrar, en cada caso, la función de distribución.

Solución. Empezamos considerando el caso $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Por definición, para cada conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$:

$$m_\varphi(A) = m(\{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : x_1 + x_2 \in A\}).$$

Como todos estos valores son finitos, deducimos que la medida inducida es de Lebesgue-Stieltjes y su función de distribución viene dada por:

$$F(t) = \begin{cases} -m_\varphi((t, 0]) & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ m_\varphi((0, t]) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Si $t < 0$, entonces $\{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : x_1 + x_2 \in (t, 0]\} = \{(0, 0)\}$, y por tanto $F(t) = 0$.

Si $t \in (0, 1]$, entonces

$$\{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : x_1 + x_2 \in (0, t]\} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0, t], x_2 \in [0, t - x_1]\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Esta región es por tanto el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, t)$ y $(t, 0)$ (menos el origen), y por tanto $F(t) = t^2/2$.

Si $t \in [1, 2]$, entonces

$$\{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : x_1 + x_2 \in (0, t]\} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, \min\{1, t - x_1\}]\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Está región es por tanto el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ (sin el origen) menos el triángulo de vértices $(t-1, 1)$, $(1, t-1)$, $(1, 1)$ (la región sí incluye el segmento que une los puntos $(t-1, 1)$ y $(1, t-1)$). Por consiguiente, $F(t) = 1 - (2-t)^2/2$.

Finalmente, si $t > 2$,

$$\{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : x_1 + x_2 \in (0, t]\} = [0, 1] \times [0, 1],$$

y concluimos que $F(t) = 1$.

En resumen,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{t^2}{2} & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2} & \text{si } 1 < t \leq 2, \\ 1 & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

Veamos ahora el caso $\varphi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. De nuevo por definición, se tiene para cada conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$:

$$m_\varphi(A) = m(\{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : |x_1 - x_2| \in A\}).$$

Como todos estos valores son finitos, deducimos que la medida inducida es de Lebesgue-Stieltjes y su función de distribución viene dada por:

$$F(t) = \begin{cases} -m_\varphi((t, 0]) & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ m_\varphi((0, t]) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Ahora bien, si $t < 0$ el conjunto $\{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : |x_1 - x_2| \in (t, 0]\}$ consta solo de la diagonal del cuadrado unidad y por tanto $F(t) = 0$. Esto último se puede ver fácilmente recubriendo la diagonal por la unión finita de rectángulos $V_n = (I_n^1 \times I_n^1) \cup \dots \cup (I_n^{2^n} \times I_n^{2^n})$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \dots, 2^n$, y haciendo $n \rightarrow \infty$. Por otro lado, si $0 < t < 1$, entonces el conjunto

$$\{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 < |x_1 - x_2| \leq t\}$$

es la región comprendida dentro del cuadrado unidad y entre las dos rectas de $\mathbb{R}^2$ dadas por $x_2 = x_1 - t$ y $x_2 = x_1 + t$. Esto nos da $F(t) = 1 - (1 - t)^2 = 2t - t^2$. Finalmente, si $t \geq 1$ se tiene que el conjunto anterior es todo el cuadrado unidad (menos la diagonal) y por tanto $F(t) = 1$. Es decir,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 2t - t^2 & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

3.- Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $dm = dx dy$ la medida de Lebesgue en X . Definimos $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ por medio de $\Phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Sea m_Φ la medida inducida por Φ y m en $\mathbb{R}$.

a) Calcular el valor de $m_\Phi([0, 1])$.

b) Demostrar que m_Φ tiene la forma $dm_\Phi(y) = W(y) dy$ y encontrar $W(y)$ explícitamente.

Solución. a) Por definición, $m_\Phi([0, 1]) = m(\Phi^{-1}([0, 1]))$. Ahora bien,

$$\Phi^{-1}([0, 1]) = \{(x, y) : \Phi(x, y) \in [0, 1]\} = \{(x, y) : 0 \leq \ln(x^2 + y^2) \leq 1\} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e\}.$$

Se trata por tanto del anillo con radio interior 1 y radio exterior $\sqrt{e}$ de donde se deduce

$$m_\Phi([0, 1]) = m(\Phi^{-1}([0, 1])) = e\pi - \pi = (e - 1)\pi.$$

b) Sea f una función medible y no negativa. Entonces, usando los teoremas del cambio de variables y de Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(y) dm_\Phi(y) &= \int_X f(\ln(x^2 + y^2)) dx dy \stackrel{\text{polares}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\ln r^2) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\infty f(\ln r^2) r dr \stackrel{y=\ln r^2}{=} 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{y/2} \frac{1}{2} e^{y/2} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \pi e^y dy. \end{aligned}$$

Luego $W(y) = \pi e^y$.

4.- Se considera sobre los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^2$ la medida de Lebesgue m y la función $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, 1]$ dada por $\phi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Si m_ϕ denota la medida inducida por ϕ y m sobre los Borel de $(0, 1]$,

a) Probar que $m_\phi([a, b]) = \pi \log \frac{b}{a}$ si $0 < a < b \leq 1$.

b) Deducir que para todo $A \subset (0, 1]$ Borel se tiene $m_\phi(A) = \pi \int_A \frac{1}{t} dt$.

Solución. Por definición, $m_\phi(A) = m(\phi^{-1}(A))$ para todo A Borel de $(0, 1]$. En particular, como

$$\phi^{-1}([a, b]) = \{(x, y) : a \leq e^{-(x^2+y^2)} \leq b\} = \{(x, y) : \log \frac{1}{b} \leq x^2 + y^2 \leq \log \frac{1}{a}\}$$

es el anillo de radio interior $\sqrt{\log \frac{1}{b}}$ y radio exterior $\sqrt{\log \frac{1}{a}}$, se tiene

$$m_\phi([a, b]) = \pi \log \frac{1}{a} - \pi \log \frac{1}{b} = \pi \log \frac{b}{a}.$$

Llamando $d\nu(t) = \pi \frac{1}{t} dt$ tenemos que tanto m_ϕ como $d\nu$ son σ -finitas sobre los Borel de $(0, 1]$ y coinciden en los intervalos de la forma $[a, b]$, puesto que

$$d\nu([a, b]) = \pi \int_a^b \frac{1}{t} dt = \pi \log \frac{b}{a}.$$

Por lo tanto coinciden en la mínima σ -álgebra que los contiene. Esto prueba el tercer apartado, que también podemos obtener de forma analítica usando la propiedades de la medida inducida, el teorema del cambio de variables y el teorema de Tonelli. En efecto, dada f medible y positiva

$$\begin{aligned} \int_{(0,1]} f dm_\phi &= \int_{\mathbb{R}^2} f(e^{-(x^2+y^2)}) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(e^{-r^2}) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\infty f(e^{-r^2}) r dr = \pi \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos hecho el cambio $t = e^{-r^2}$.

5.- Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ, ν las medidas de contar en $\mathbb{N}$. Probar que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Si definimos

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ -1 & \text{si } m = n + 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

comprobar que $\int |f| d(\mu \times \nu) = \infty$ y que las integrales iteradas

$$\int \left(\int f d\mu \right) d\nu, \quad \int \left(\int f d\nu \right) d\mu$$

existen y son distintas.

Solución. En primer lugar $\{m\}, \{n\} \in \mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego $\{m\} \times \{n\} = \{(m, n)\} \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Además, todo $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pertenece a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ por ser la unión numerable de sus puntos. Se concluye por tanto que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Por otro lado, $d(\mu \times \nu)(\{m\} \times \{n\}) = \mu(\{m\}) \nu(\{n\}) = 1$ y $d(\mu \times \nu)(A) = \sum_{(m,n) \in A} 1 = \text{card}(A)$. Esto

nos dice que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En particular, cualquier función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} f d(\mu \times \nu) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} f(m,n), \quad (\text{si existe}).$$

Si f es la función dada,

$$\int |f| d(\mu \times \nu) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} |f(m,n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{n+1} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \infty,$$

mientras que

$$\begin{aligned} \int \left(\int f d\mu \right) d\nu &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(n,n) + f(n+1,n)) = 0, \\ \int \left(\int f d\nu \right) d\mu &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) \right) = f(1,1) + \sum_{m=2}^{\infty} (f(m,m-1) + f(m,m)) = f(1,1) + 0 = 1. \end{aligned}$$

6.- Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ medible; $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ medible y h definida mediante $h(x,y) = f(x)g(y)$.

a) Demostrar que h es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ medible.

b) Demostrar que si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$ entonces $h \in L^1 d(\mu \times \nu)$ y además

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_Y g d\nu \right).$$

Sugerencia: empezar con funciones simples.

Solución. a) Esta es la parte más delicada. Siguiendo la sugerencia, supongamos que f y g son ambas funciones simples; es decir,

$$\begin{aligned} f(x) = s(x) &= \sum_{k=1}^K c_k \chi_{A_k}(x) \quad \text{con } A_k \in \mathcal{M}, \\ g(y) = t(y) &= \sum_{j=1}^J d_j \chi_{B_j}(y) \quad \text{con } B_j \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Entonces $h(x,y) = s(x)t(y)$ es medible, porque

$$h(x,y) = s(x)t(y) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J c_k d_j \chi_{A_k}(x) \chi_{B_j}(y) = \sum_{k,j=1}^{K,J} c_k d_j \chi_{A_k \times B_j}(x,y),$$

con $A_k \times B_j \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, es una función simple de la σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Para terminar usamos que, por ser f y g medibles en sus respectivas σ -álgebras, existen sucesiones de funciones simples $\{s_n(x)\}_n$ y $\{t_n(y)\}_n$ que convergen puntualmente a f y g respectivamente. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) t_n(y) = f(x) g(y)$ para todo x, y deducimos que $h(x,y) = f(x)g(y)$ es medible.

b) Este apartado es una consecuencia del Teorema de Fubini, ya que las secciones de h son $h_x(\cdot) = f(x)g(\cdot)$ y $h^y(\cdot) = f(\cdot)g(y)$ y

$$\iint_{X \times Y} |h| d(\mu \times \nu) = \left(\int_X |f| d\mu \right) \left(\int_Y |g| d\nu \right) < \infty.$$

7.- Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M}$ -medible, $f \geq 0$, y sea $A_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

a) Probar que $A_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ es la σ -álgebra de Borel en $\mathbb{R}$).

Sugerencia: empezar con f simple.

b) Dada una medida μ en $(X, \mathcal{M})$ σ -finita, probar que $\int_X f \, d\mu$ coincide con la medida producto $\pi = d\mu \otimes dy$ del conjunto A_f .

Solución. a) Si empezamos con la función simple $f(x) = s(x) = \sum_{k=1}^K c_k \chi_{B_k}(x)$, con $B_k \in \mathcal{M}$ disjuntos y $c_k > 0$, se tiene $A_s = \sum_{k=1}^K B_k \times [0, c_k)$ que claramente es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$ -medible porque $B_k \times [0, c_k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}$. Además (con $dy = dm$ la medida usual de Lebesgue)

$$d(\mu \times m)(A_s) = \sum_{k=1}^K \mu(B_k) c_k = \int_X s \, d\mu.$$

Para la f dada, elegimos (*lema técnico*) una sucesión creciente de funciones simples positivas $\{s_n(x)\}_n$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$ para todo x . Entonces $A_f = \bigcup_{n \geq 1} A_{s_n}$, luego A_f es medible.

b) Por el TCM se cumple

$$d(\mu \times \nu)(A_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mu \times \nu)(A_{s_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

8.- Sea $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (álgebra de Borel en $[0,1]$), μ la **medida de Lebesgue** en $\mathcal{A}_1$, ν la **medida de contar** en $\mathcal{A}_2$. En el espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu \otimes \nu)$ se considera el conjunto $V = \{(x, y) : x = y\}$. Comprobar que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y que $(\mu \times \nu)(V) = +\infty$. Sin embargo

$$\int_Y \left(\int_X \chi_V \, d\mu \right) d\nu = 0, \quad \int_X \left(\int_Y \chi_V \, d\nu \right) d\mu = 1.$$

Esto muestra que la hipótesis de que las medidas sean σ -finitas no se puede quitar del enunciado del Teorema de Fubini.

Sugerencia: Si $V_n = (I_n^1 \times I_n^1) \cup \dots \cup (I_n^{2^n} \times I_n^{2^n})$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \dots, 2^n$, entonces $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

Solución. Puesto que cada $V_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y V es la intersección numerable de ellos, se tiene que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ también.

Sea $\mu = m$ la medida de Lebesgue. Para cada $y \in [0, 1]$ tenemos

$$\int_X \chi_V(x, y) \, d\mu(x) = \int_{\{y\}} 1 \, dm = m(\{y\}) = 0, \text{ luego } \int_Y \left(\int_X \chi_V(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = 0,$$

mientras que, si $x \in [0, 1]$,

$$\int_Y \chi_V(x, y) \, d\nu(y) = \nu(\{x\}) = 1, \text{ luego } \int_X \left(\int_Y \chi_V(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_0^1 1 \, dx = 1.$$

Para calcular $(\mu \times \nu)(V)$ empezamos recordando que $\mu \times \nu$ se define como la medida resultante de la construcción de Caratheodory, de forma que

$$(\mu \times \nu)(V) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) : A_i, B_i \in \mathcal{B}_{[0,1]}, V \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i) \right\}.$$

Nótese que si $V \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$ con $A_i, B_i \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ se tiene que $(x, x) \in \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$ para cada $x \in [0, 1]$. Por tanto $x \in \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B_i)$ de forma que $[0, 1] \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B_i)$. Por la subaditividad y la monotonía,

$$1 \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_i).$$

Por tanto, para algún k se tiene que $\mu(A_k \cap B_k) > 0$, y por consiguiente que $\mu(A_k) > 0$ y $\mu(B_k) > 0$. Esto implica que B_k tiene cardinalidad infinita, de manera que $\nu(B_k) = \infty$ y por consiguiente $(\mu \times \nu)(A_k \times B_k) = \mu(A_k)\nu(B_k) = \infty$. Así, la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i)$ es infinita y, puesto que los conjuntos A_i, B_i eran arbitrarios, $(\mu \times \nu)(V) = \infty$.

9.- Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, dm)$, donde m es la medida de Lebesgue. Demostrar que $f(y-x)g(x)$ es integrable para casi todo y . Para estos valores de y , ponemos $h(y) = \int f(y-x)g(x) dm(x)$. Se dice que h es la *convolución* de f y g y se escribe $h = f * g$. Demostrar que h es integrable y que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Recordamos que $\|h\|_1 = \int |h| dm$.

Solución. La función de dos variables $F(x, y) = f(y-x)$ es medible, porque para todo conjunto Δ medible en $\mathbb{R}$, el subconjunto $\{(x, y) : y-x \in \Delta\}$ de $\mathbb{R}^2$ es medible. Por tanto, la función $H(x, y) = f(y-x)g(x)$ y es medible. Aplicando el Teorema de Tonelli a la función positiva y medible $|H|$, vemos que

$$\iint |H(x, y)| dm(x) dm(y) = \int |g(x)| \left(\int |f(y-x)| dm(y) \right) dm(x) = \int |g| dm \cdot \int |f| dm.$$

Por tanto, H es integrable en $\mathbb{R}^2$. Por el Teorema de Fubini, $h(y) = \int f(y-x)g(x) dm(x)$ está definida en c.t.p. Además, se obtiene

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \int |h(y)| dm(y) \leq \int \left(\int |f(y-x)g(x)| dm(x) \right) dm(y) \\ &= \int |g(x)| \left(\int |f(y-x)| dm(y) \right) dm(x) = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

10.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Comprobar que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$ y que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$. ¿Qué hipótesis no se verifica en el teorema de Fubini?

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \frac{1}{x^2} \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2} dy \stackrel{\frac{y}{x} = \tan u}{=} \frac{1}{x} \int_0^{\arctan(\frac{1}{x})} \frac{1 - \tan^2 u}{(1 + \tan^2 u)^2} \frac{du}{\cos^2 u} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{\arctan(\frac{1}{x})} (\cos^2 u - \sin^2 u) du = \frac{1}{x} \int_0^{\arctan(\frac{1}{x})} \cos(2u) du \\ &= \frac{\sin(2 \arctan(\frac{1}{x}))}{2x} = \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Veamos con más detalle el último paso. Definiendo $z = 2 \arctan(\frac{1}{x})$, se tiene por un lado que $1/x = \tan(z/2)$ y por otro que $\sin(2 \arctan(\frac{1}{x})) = \sin z = 2 \sin(z/2) \cos(z/2)$. Así pues,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2 \arctan(\frac{1}{x}))}{2x} &= \sin(z/2) \cos(z/2) \tan(z/2) = \sin^2(z/2) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2(z/2)} = \frac{1}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

como habíamos afirmado.

Por simetría obtenemos

$$\int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 f(y, x) dx = - \frac{1}{1+y^2}.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4},$$

mientras que,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = - \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = - \frac{\pi}{4}.$$

Lo que falla aquí es que la función no es integrable (esto es una forma de demostrarlo).

11.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas (con respecto a la medida de Lebesgue) coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1, 1] \times [-1, 1]$. ¿Qué hipótesis no se verifica en el Teorema de Fubini?

Solución. Las integrales iteradas valen 0 porque tanto f_x como f_y son integrables (continuas y acotadas), impares y el dominio de integración es simétrico. f no es integrable porque

$$\iint_{[-1,1] \times [-1,1]} |f(x, y)| dx dy = 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx dy = 2 \int_0^1 \frac{1}{y(1+y^2)} dy = \infty.$$
