

- El vector posición de una partícula viene dado por $\vec{r}(t) = (2t^2 - 3)\hat{i} + (4t + 4)\hat{j} + (t^3 + 2t^2)\hat{k}$. Calcule:
 - La posición y la distancia al origen cuando $t = 0$.
 - La velocidad de la partícula cuando $t = 1$.
 - La aceleración y sus componentes intrínsecas (tangencial y normal) para $t = 2$.
- Un cuerpo se mueve en el plano XY según el siguiente vector posición $\vec{r}(t) = (t + 4t^4)\hat{i} + (18 - 3t^2)\hat{j}$ en el S.I. Calcule para $t = 1$ s:
 - su vector velocidad.
 - las componentes cartesianas y las componentes intrínsecas de la aceleración.
 - los vectores $\vec{u}_t$ y $\vec{u}_n$. Compruebe que son perpendiculares.
 - el radio de curvatura.
 - el centro de curvatura.
- Determine la trayectoria descrita por una partícula que se mueve con una aceleración tangencial $\vec{a}_t = 4t\hat{i} + 3t\hat{j}$, sabiendo que para $t = 0$, la partícula está en reposo en el origen de coordenadas. ¿Cuánto vale la aceleración normal?

- La trayectoria de una partícula cargada moviéndose en el seno de un campo magnético viene dado por:

$$\vec{r}(t) = b \cos \Omega t \hat{i} + b \sin \Omega t \hat{j} + ct \hat{k} \text{ donde } b, c \text{ y } \Omega \text{ son constantes positivas.}$$

Demuestre que la partícula se está moviendo con celeridad constante y calcule el valor de la aceleración.

- Un punto P que parte del reposo se mueve sobre una curva cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} x &= R(\omega t + \sin(\omega t)) \\ y &= R(1 + \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

donde R y ω son constantes positivas. Determine

- ecuación de la trayectoria.
 - vectores velocidad y aceleración.
 - componentes intrínsecas de la aceleración.
 - radio de curvatura
- Desde lo alto de un acantilado de 100 m de altura se dispara un proyectil con una velocidad de 500 m/s y con una inclinación de 60° . Supuesto despreciable el rozamiento con el aire, calcule:
 - tiempo que tarda el proyectil en impactar con la superficie del mar.
 - Distancia que alcanza el proyectil.
 - Velocidad en el momento del impacto. (módulo y dirección)
 - Componentes intrínsecas de la aceleración cuando el proyectil se encuentra:
 - a 100 m de altura y bajando.
 - en el punto de altura de altura máxima.

Sol: $t_v = 88,6 \text{ s}; d = 22150 \text{ m}; v = 501,96 \text{ m/s}, \alpha = -60,13^\circ; 100 \text{ m subiendo: } a_t = 8,48 \text{ m/s}^2; a_n = 4,89 \text{ m/s}^2; H_{max} : a_t = 0 \text{ m/s}^2; a_n = 9,8 \text{ m/s}^2$

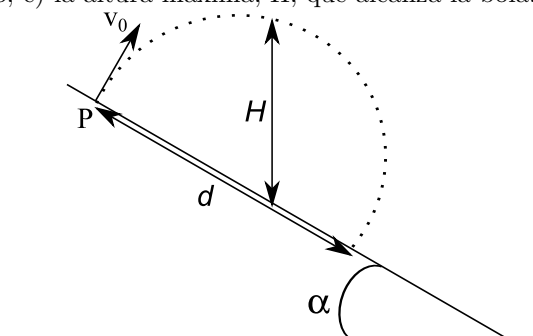
- Se lanza un proyectil desde el suelo a una distancia D de un edificio. El edificio tiene una ventana a una altura h del suelo y el lanzador quisiera que entrara de forma horizontal. Obtenga el valor del ángulo con el que se debe lanzar el proyectil y la velocidad inicial v_0 .

Sol: $\tan \alpha = 2h/D; v_0 = \sqrt{(g(4h^2 + D^2))/2h}$

- Calcule el ángulo α con el que se debe lanzar una jabalina para que la distancia recorrida sea máxima.

Sol: $\alpha = 45^\circ$

9. Guillermo Tell va a intentar ensartar con una flecha una manzana colocada en la cabeza de su hijo a cierta distancia horizontal d del punto de disparo y a 50 cm por debajo del punto de lanzamiento de la flecha. La flecha sale con una velocidad inicial de 50 m/s y una elevación de 30° sobre la horizontal. El viento produce una aceleración horizontal de 2 m/s^2 que frena la flecha. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcular: a) la distancia horizontal d a la que deberá estar el hijo para ensartar la manzana; b) la altura máxima que alcanza la flecha medida desde el punto de lanzamiento; c) calcule las componentes intrínsecas de la aceleración cuando el cuerpo alcanza una altura de 25 metros respecto del suelo y está bajando. Considere que el punto de salida de la flecha está a 1.8 m del suelo. **Sol:** $d = 192,17 \text{ m}$; $h_{\max} = 31,25 \text{ m}$; $a_t = 1,36 \text{ m/s}^2$; $a_n = 9,91 \text{ m/s}^2$
10. Desde el punto P de la ladera de una montaña que tiene una inclinación α respecto de la horizontal, se lanza con una velocidad inicial v_0 y perpendicularmente a la ladera una bola de acero. Determine: a) el tiempo que está la bola en el aire; b) la distancia, d , medida sobre la ladera entre el punto de lanzamiento y el punto de impacto de la bola con el suelo; c) la altura máxima, H , que alcanza la bola.



11. Un móvil recorre una circunferencia de radio r con celeridad constante ($|\vec{v}| = \text{cte} = v$). Razone cómo se ve afectada su aceleración en cada uno de los siguientes supuestos:
- su celeridad se dobla.
 - el radio de la circunferencia se dobla.
12. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria en tres dimensiones con celeridad constante. Demuestre que sus vectores velocidad y aceleración son siempre perpendiculares.
13. Establezca la importancia relativa de las resistencias lineal y cuadrática sobre una pelota de béisbol de diámetro $D = 7 \text{ cm}$, que viaja una velocidad $v = 5 \text{ m/s}$. Haga lo mismo para una gota de lluvia ($D = 1 \text{ mm}$ y $v = 0,6 \text{ m/s}$) y para una gota de aceite utilizada en el experimento de Millikan ($D = 1,5 \mu\text{m}$ y $v = 5 \times 10^{-5} \text{ m/s}$).
14. Para una pelota de béisbol de diámetro $D = 7 \text{ cm}$ determine la velocidad de vuelo v para la cual las fuerzas f_{cuad} y f_{lin} son igual de importantes. ¿Y para una pelota de playa de diámetro $D = 70 \text{ cm}$?
15. Halle la velocidad límite de una gota de aceite en el experimento de Millikan ($D = 1,5 \mu\text{m}$; $\rho_{\text{aceite}} = 840 \text{ kg/m}^3$). Haga lo mismo para una gota de niebla de diámetro $D = 0,2 \text{ mm}$.
16. Supongamos que un proyectil sometido a una fuerza lineal resistiva es arrojado verticalmente hacia abajo con una velocidad v_{y0} que es mayor que la velocidad límite v_{lim} . Describir y explicar cómo varía la velocidad con el tiempo, y hacer una gráfica de v_y frente a t para el caso en que $v_{y0} = 2v_{\text{lim}}$.
17. Halle los tiempos característicos, τ , para la gota de aceite y la gota de niebla del ejercicio anterior.
18. Golpeamos una diminuta bola de diámetro $d = 0,2 \text{ mm}$, de modo que sale con una velocidad $v = 1 \text{ m/s}$ formando un ángulo de 45° . Halle el alcance horizontal de dicha bola suponiendo que la bola es de oro ($\rho = 16 \text{ g/cm}^3$). ¿Qué ocurriría si la bola fuese de aluminio ($\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$)? **Sol:** $d_{\text{Au}} = 9,73 \text{ cm}$; $d_{\text{Al}} = 7,44 \text{ cm}$
19. Halle la velocidad límite en el aire de una pelota de béisbol ($m = 0,15 \text{ kg}$ y diámetro $D = 7 \text{ cm}$) y de un rodamiento de bola de acero de diámetro $D = 3 \text{ mm}$ ($\rho_{\text{acero}} = 8 \text{ g/cm}^3$) cuando se dejan caer desde lo alto de una torre. Considere únicamente el término cuadrático de la fuerza de rozamiento. **Sol:** Pelota : $v_{\text{lim}} = 34,64 \text{ m/s}$; Rodamiento : $v_{\text{lim}} = 22,19 \text{ m/s}$
20. Un valor típico para el coeficiente de resistencia cuadrática del aire sobre un ciclista está alrededor de $c = 0,2 \text{ N/(m/s)}^2$. Suponiendo que la masa total del ciclista (ciclista más bicicleta) es $m = 80 \text{ kg}$ y que en $t = 0$ el ciclista rueda a una velocidad $v_0 = 20 \text{ m/s}$ (72 km/h), calcule el tiempo característico. ¿Cuánto tardará en reducir la velocidad a 15 m/s ? ¿Y a 10 m/s y a 5 m/s ? **Sol:** $\tau = 20 \text{ s}$; $t_{15 \text{ m/s}} = 6,66 \text{ s}$; $t_{10 \text{ m/s}} = 20 \text{ s}$; $t_{5 \text{ m/s}} = 60 \text{ s}$
21. Consideremos el ciclista del problema anterior, pero sobre el cual además de la fuerza de resistencia del aire consideramos una fuerza de rozamiento entre las ruedas y el suelo y cuyo valor aproximado es de $f_{\text{roz}} = 3 \text{ N}$. Escriba la ecuación de movimiento cuando el ciclista deja de pedalear. ¿Cuánto tardará en reducir la velocidad a 15 m/s ? ¿Y a 10 m/s y a 5 m/s ? ¿Cuánto tardará en detenerse por completo? **Sol:** $t_{15 \text{ m/s}} = 6,34 \text{ s}$; $t_{10 \text{ m/s}} =$

$$18,4 \text{ s}; t_{5m/s} = 48,31 \text{ s}; t_{0m/s} = 142,47 \text{ s}$$

22. Se lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba con velocidad v_0 y sometida a una resistencia cuadrática de magnitud $f(v) = cv^2$. Escriba la ecuación de movimiento para el viaje de subida y muestre que se puede escribir como $\dot{v} = -g[1 + (v/v_{lim})^2]$. Obtenga la velocidad de la pelota en función de la posición y demuestre que la altura máxima de la pelota es:

$$y_{max} = \frac{v_{lim}^2}{2g} \ln\left(\frac{v_{lim}^2 + v_0^2}{v_{lim}^2}\right).$$

(Para este apartado transforme $\dot{v}$ como $v dv/dy$ y resuelva la ecuación del movimiento).

Si $v_0 = 20 \text{ m/s}$ y considerando las características físicas de la pelota de los problemas anteriores, calcule la altura máxima de la pelota y compare con el valor que obtendría en el caso de que no se considerase el rozamiento con el aire.

Sol: $H_{max} = 17,61 \text{ m}$; Sin rozamiento $H_{max} = 20,4 \text{ m}$

23. Una esfera de titanio ($\rho_{titanio} = 4,5 \text{ g/cm}^3$) y de diámetro $D = 0,3 \text{ mm}$ se deja caer desde lo alto de la Torre Eiffel altura $h = 300 \text{ m}$. Si únicamente consideramos el término lineal de rozamiento con el aire obtenga la velocidad límite de dicha partícula.

Una vez que ha transcurrido un tiempo $t = 4\tau$ (τ es el tiempo característico del movimiento) ya podemos suponer que la velocidad límite ha sido alcanzada. Calcule el tiempo que tardará la partícula en llegar al suelo. **Sol:** $t = 24,4 \text{ s}$

24. La fuerza de amortiguamiento que el aire en reposo ejerce sobre una partícula contaminante de masa $1 \cdot 10^{-11} \text{ kg}$ que se mueve con velocidad v viene dada por $\vec{F}_r = -b\vec{v}$, donde $b = 3 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{s/m}$. Determine la velocidad límite de caída de la partícula contaminante. Estime el tiempo que tarda en depositarse en el suelo una de estas partículas si ha sido emitida por una chimenea de 100 m de altura y parte con una velocidad inicial $v_0 = 2 \text{ m/s}$ vertical hacia arriba.

25. Una partícula de $m = 2 \text{ g}$ es lanzada por una superficie horizontal con una velocidad $v_0 = 3 \text{ m/s}$. Si consideramos que la única fuerza que actúa sobre dicha partícula es la debida al rozamiento lineal con el aire ($b = 0,2 \text{ N s/m}$). Calcule:

- el tiempo que tardará la partícula en reducir su velocidad a la mitad.
- el espacio que habrá recorrido hasta ese instante.

Si ahora consideramos que también existe rozamiento entre la partícula y la superficie, siendo $\mu = 0,8$, resuelva de nuevo los apartados anteriores. Calcule también el tiempo que tardará la partícula en detenerse y el espacio que habrá recorrido.

26. Una masa de 4 kg es lanzada verticalmente con una velocidad inicial de 60 m/s . La masa encuentra una resistencia del aire $\vec{F}_{roz} = -b\vec{v}$, con $b = 0,03 \text{ N s/m}$. Calcular el tiempo que transcurre desde el lanzamiento hasta que alcanza la máxima altura. ¿Cuál es la máxima altura?

27. Un paracaidista cuya masa es de 80 kg salta desde lo alto de un rascacielos alcanzando una velocidad límite de 50 m/s . Calcular la aceleración del paracaidista cuando su velocidad es de 30 m/s . Determinar la resistencia del aire que actúa sobre él cuando su velocidad es de 30 m/s y 50 m/s . Resuelva el problema para los casos de tanto de rozamiento lineal como cuadrático.

28. La resistencia que encuentra un paracaidista que cae con una velocidad v puede expresarse en el S.I. por $F = -kr^2v^2$ con $k = 0,3$ y siendo r el radio del paracaídas. Determinar r de modo que el paracaídas cuya masa, incluido el paracaidista, es $m = 100 \text{ kg}$ llegue al suelo con la misma velocidad con la que llegaría cayendo en el vacío desde $h = 1 \text{ m}$ de altura. ¿En qué instante llevará una velocidad de 4 m/s ?

29. Admitiremos que un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido experimenta una resistencia al avance que es proporcional al cuadrado de la velocidad v y a la superficie frontal S según la ley: $F_{roz} = kSv^2$. Las aspas de 4 m de radio de un helicóptero giran a una velocidad de 10 r.p.s. y tienen un perfil de $1,25 \text{ cm}$ de grosor. Calcular para cada una de las aspas la fuerza total de rozamiento. Tomar $k = 0,1 \text{ N s}^2/\text{m}^4$.

30. Una partícula de masa 20 g es lanzada verticalmente hacia abajo con una velocidad $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Si consideramos que la fuerza de rozamiento que actúa sobre ella es únicamente de tipo lineal ($b=0.04 \text{ N s/m}$). Calcule:

- el tiempo que tardará la partícula en alcanzar el 101 % de su velocidad límite.

Si consideramos que a partir del tiempo obtenido en el apartado anterior la partícula describe un movimiento rectilíneo uniforme,

- calcule el tiempo total que tardará en llegar al suelo si consideramos que se lanzó desde lo alto de una torre de altura 100 m .

31. ¹Desde lo alto de un trampolín se deja caer un rodamiento de cobre ($\rho_{Cu} = 8,9 \text{ g/cm}^3$) de radio $r = 5 \text{ cm}$. El trampolín está situado a 5 metros de altura sobre una piscina de $2,5 \text{ m}$ de profundidad. Si consideramos únicamente el término de rozamiento cuadrático. Calcule el tiempo que tardará el rodamiento en llegar al fondo de la piscina. Datos: $C_d(\text{esfera}) = 0,5$; $\rho_{aire} = 1,225 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{agua} = 1 \text{ g/cm}^3$

¹Para la parte correspondiente al movimiento del rodamiento en el agua, el alumno puede obtener las ecuaciones analíticas, pero para la resolución deberá tomar aproximaciones o aplicar cálculo numérico