Análisis I

Lista 1: inducción, supremos e ínfimos — 1º Física, curso 2021-22

1. Demostrar las siguientes identidades y afirmaciones para $n \in \mathbb{N}$, utilizando el Principio de Inducción:

i) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}\,.$

ii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,.$

iii) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2\,.$

iv) $1 + 3 + \cdots + (2\,n - 1) = n^2\,.$

v) Para todo $n \geq 2$, se verifica

$$1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)\,(n-1)! = n!$$

vi) Para todo n, se verifica $4\,(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}\,.$

vii)

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\,.$$

viii) El número de rectas determinado por $n \geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$.

ix) Para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y\,.$

x) Para todo número natural, $n\,(n^2 + 5)$ es múltiplo de 6.

xi) Para todo número natural, $2^{\,2n} + 15\,n - 1$ es múltiplo de 3.

xii) (*) Si n no es múltiplo de 4, la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10. *Indicación*: Compruébense los casos $n = 1, 2, 3$ y, a continuación, demuéstrese que si la afirmación es cierta para n, también lo es para $n + 4$.

2. (*) Demostrar que para todo número natural n y números a y b cualesquiera se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\,,$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\;(n-k)!}\,, \qquad \text{y} \qquad 0! = 1\,.$$

Indicación: Demostrar primero que

$$\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}\,.$$

3. (*) Demostrar, para todo $q \neq 1$ y todo $n \in \mathbb{N}$, la identidad

$$\left(1+q\right)\left(1+q^{2}\right)\left(1+q^{2^{2}}\right)\cdots\left(1+q^{2^{n}}\right)=\frac{q^{2^{n+1}}-1}{q-1}\,.$$

.

4. Utilizar el Principio de Inducción para demostrar las siguientes desigualdades:

I) $2^n \geq n^3$, para todo $n \geq 10$.

II) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$,

III) (*) $(1+x)^n \geq 1+n\,x$, para todo número real $x \geq -1$ (desigualdad de Bernoulli).

5. (**) Utilizar el Principio de Inducción para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda colección de n números reales $a_1, \ldots, a_n$ mayores que cero y tales que $a_1 \cdot a_2 \cdot \;\cdots\; \cdot a_n = 1$, se verifica $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.
Usar este resultado para demostrar el Teorema de Cauchy: MG $\leq$ MA (media geométrica $\leq$ media aritmética), es decir,

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \;\cdots\; \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

6. Identificar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $|x+1| > 3\,.$
2. $|x-1| \leq |x+1|\,.$
3. $|x^2-3| \leq 1\,.$
4. $\dfrac{x^2}{x^2-4} < 0\,.$
5. $|x-1|+|x-2| > 1\,.$
6. $\dfrac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1\,.$

7. Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

1. $A = \left\{\, x \,:\, x^2 < 4 \,\right\}.$
2. $B = \left\{\, x \,:\, x^2 \geq 4 \,\right\}.$
3. $C = \left\{\, x \,:\, x^2 \leq 4 \,\right\}.$
4. $D = \left\{\, x \,:\, 2 < x^2 \leq 4 \,\right\}.$

8. Demostrar que los siguientes conjuntos de números reales tienen supremo e ínfimo y hallarlos. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

1. $E = \left\{ \dfrac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$
2. $F = E \cup \{0\}\,.$
3. $G = \left\{ \dfrac{1}{n} - (-1)^n \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$
4. $H = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,:\, x > 0\,,\; x^2 \leq 3 \right\}.$
5. (*) $I = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\,,\; x^n \leq y \right\}$, con $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ positivos.

9. Si s es el supremo del conjunto A, ¿qué podemos afirmar sobre el conjunto $-A = \big\{ -x \,:\, x \in A \big\}$?

10. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$ e $\inf B$ y que, además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

11. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, acotados superiormente. Sea

$$A + B = \left\{ a + b \,:\, a \in A\,,\; b \in B \right\}.$$

Demostrar que $\sup\,(A+B) = \sup A + \sup B$.

Indicación: Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup\,(A+B)$ basta ver que $\sup A + \sup B \leq \sup\,(A+B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Elegir a en A y b en B tales que $\sup A - a < \varepsilon/2$ y $\sup B - b < \varepsilon/2$.

Comentarios: (*) ejercicio difícil, (**) ejercicio muy difícil.