# Análisis I

Lista 2: sucesiones 1º Física, curso 2021-22

**1.** Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones

A. $\left\{\dfrac{n^2}{n+2}\right\}$ B. $\left\{\dfrac{n^3}{n^3+2n+1}\right\}$

C. $\left\{\dfrac{n}{n^2-n-4}\right\}$ D. $\left\{\dfrac{\sqrt{2\,n^2-1}}{n+2}\right\}$

E. $\left\{\dfrac{n+\sqrt{n^3+2\,n}}{n^2+2}\right\}$ F. $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}}\right\}$

G. $\left\{\dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+2}\right\}$ H. $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right\}$

I. $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ J. $\left\{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n\right\}$

K. $\left\{\dfrac{2^n}{4^n+1}\right\}$ L. $\left\{\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right\}$

M. $\left\{\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n+1}{n}\right\}$ N. $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$

O. $\left\{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right\}$

**2.** Utilizar la identidad

$$\frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

para calcular el límite de la sucesión

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\,(n+1)}\,.$$

**3.** Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right).$$

**4.** Sea $a>1$ . Se define la sucesión $\{x_n\}_n$ mediante la recurrencia

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{a}\,, \\ x_{n+1}=\sqrt{a\cdot x_n}\,. \end{cases}$$

Probar que esta sucesión es monótona creciente y acotada. Calcular su límite.

**5.** Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de números reales tal que $x_1 > -3/2$ y

$$x_{n+1} = \sqrt{2\,x_n + 3}\,.$$

Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite.
*Indicación*: distinguir los casos $x_1 \geq 3$ y $x_1 < 3$.

**6.** Sea $x_1 = 1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

$$\text{A.}\quad x_{n+1} = \frac{1}{4}\,x_n\,, \qquad \text{B.}\quad x_{n+1} = \frac{1}{n+1}\,x_n\,,$$

$$\text{C.}\quad x_{n+1} = \frac{n}{n+1}\,x_n\,, \qquad \text{D.}\quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\,x_n\,.$$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

**7.** Considérese la sucesión

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\,,$$

donde $x_1 = a > 0$. Estudiar la convergencia.

**8.** Interpretar las expresiones siguientes como límite de una sucesión definida de forma recurrente:

$$\text{A.}\qquad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}\,,$$

$$\text{B.}\qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}\,,$$

$$\text{C.}\qquad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}\,.$$

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

**9.** (**) Demostrar que si $x_n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,.$$

**10.** Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \qquad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \qquad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}\,.$$

**11.** (*) Demostrar mediante el Principio de Inducción que para todo $n = 1, 2, \ldots$ se satisfacen las desigualdades

$$2^{n-1}\,n! \leq n^n \leq \mathrm{e}^{n-1}\,n!\,.$$

Como consecuencia, probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(n!\right)^{1/n} = +\infty\,.$$

**12.** Hallar el valor de los siguientes límites

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3-1\right)^{1/3n}, \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{1/n}-n^{1/n}\right).$$

**13.** Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, existe una sucesión $\{a_n\}_n$ contenida en $A$ y tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A\,.$$

**14.** Sea la sucesión de término general

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Demostrar que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0$ tal que

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \qquad \text{para todos los } n > n_0\,.$$

Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.

**15.** Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión no acotada. Demostrar que tiene una subsucesión que tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

**Comentarios:** (*) ejercicio difícil, (**) ejercicio muy difícil.